О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином

И. Е. Иванов

Ранее автор доказал, что автоматные функции с магазинной памятью сохраняют множество периодических последовательностей и привел экспоненциальную оценку удлинения периода при этом. Для автоматов с унарным магазином эту оценку удалось понизить до квадратичной.

Ключевые слова: автомат с магазинной памятью с однобуквенным магазином, детерминированная функция, периодические последовательности.

1. Введение

Автомат с магазинной памятью является акцептором контекстно-свободных языков [1]. По большей части его исследование находилось в плоскости теории формальных грамматик. В работе [2] были найдены различия конечных автоматов и автоматов с магазинной памятью в рамках задачи описания классов вычислимых функций. Периодические свойства конечных автоматов хорошо изучены [3]. Автор изучает эти свойства для автоматных функций с магазинной памятью [4].

Инициальным детерминированным автоматом с магазиной памятью будем называть «девятку»

$$P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\},$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина),

$\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to Q$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to B$ — функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \to \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата q(t), записанное в магазине слово $\gamma(t)$, и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \gamma(0) = \gamma_0 \\ z(t) = LS(\gamma(t)) \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)) \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)) \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)) \end{cases}$$

где $LS : \Gamma^* \to \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непустого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \to \Gamma^*$ — стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Инициальный автомат с магазинной памятью опеделяет детерминированную функцию $f : A^* \to B^*$. Обозначим $\mathcal{M}(A, B)$ множество детерминированных функций, порождаемых автоматами с магазинной памятью. Отметим, что $\mathcal{M}(A, B)$ содержит множество ограниченно-детерминированных функций.

Обозначим $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z) \in Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}} |\eta(q, z)|$ и будем говорить, что $P \in \mathcal{M}(n, m, k)$. Здесь n — число состояний, m — арность магазина, k — максимальное возможная длина записи в магазин за один такт.

Будем говорить, что $P_0 = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$, — инициальный автомат с магазинной памятью без входа, если он удовлетворяет системе канонических уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \gamma(0) = \gamma_0 \\ z(t) = LS(\gamma(t)) \\ q(t+1) = \varphi(q(t), z(t)) \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(q(t), z(t)) \\ b(t) = \psi(q(t), z(t)) \end{cases}$$

В тех же обозначениях $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}} |\eta(q,z)|$ и будем говорить, что автомат с магазинной памятью без входа $P_0 \in \mathcal{M}_0(n,m,k)$.

В работе [4] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f : A^* \to B^*$ *и* $f \in \mathcal{M}(A,B)$. *Тогда* f *преобразует периодические сверхслова в периодические.*

Для автомата с магазинной памятью без входа обозначим $L(P)$ длину периода периодической последовательности, которую он генерирует. Нас будет интересовать максимальная длина периода в классе автоматов $\mathcal{M}_0(n,m,k)$, а именно:

$$L(n,m,k) = \max_{P\in\mathcal{M}_0(n,m,k)} L(P).$$

В работе [4] была дана оценка на функцию $L(n,m,k)$.

Теорема 2. *Пусть* $P = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ *— автономный автомат с магазинной памятью. Тогда длина периода периодической последовательность, которую* P *генерирует не больше, чем* $\sum\limits_{i=0}^{nm} k^i$, *где* $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}} |\eta(q,z)|$, *то есть*

$$L(n,m,k) \leqslant \sum_{i=0}^{nm} k^i.$$

Оказывается, что в случае унарного магазина ($|\Gamma| = 1$) оценку из теоремы 2 можно существенно улучшить. В разделе 2 доказывается верхняя оценка периода выходной последовательности для автомата с магазинной памятью без входа. В разделе 3 рассматривается общий случай. В обоих случаях удалось построить пример автоматов с магазинной памятью, на которых полученные оценки ассимптотически достигается.

Замечание. Во всех дальнейших рассуждениях будем считать, что $k > 1$, так как при $k = 1$ автомат с магазинной памятью вырождается в конечный.

2. Оценка длины периода автомата с магазинной памятью при $|\Gamma| = 1$

Утверждение 1. *Пусть $P = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — автономный автомат с магазинной памятью и пусть $|\Gamma| = 1$ Тогда длина периода τ периодической последовательности, которую P генерирует ограничена:*

$$\tau \leqslant \frac{kn^2}{6} + \frac{(11n + 14)k}{12},$$

где $n = |Q|$, $k = \max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}} |\eta(q, z)|$, причем $k > 1$.

Доказательство. Пусть $P = \{Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ — автономный инициальный автомат с магазинной памятью из $\mathcal{M}_0(n, 1, k)$. Будем считать, что P генерирует последовательность максимального для автоматов из своего класса периода τ. Не ограничивая общности, будем считать, что у выходной последовательности отсутствует предпериод. Среди слов $\gamma(1)$, $\gamma(2)$,..., $\gamma(\tau)$ обязательно найдется хотя бы одно пустое слово. Иначе P функционировал бы как автомат без магазина, то есть конечный автомат, а ввиду дальнейших построений это противоречит условию максимальности периода. Поэтому для определенности будем считать, что в последовательности слов $\gamma(1)$, $\gamma(2)$,..., $\gamma(\tau)$ ровно s пустых слов с номерами $t_1 < t_2 < \ldots < t_s$. Для удобства будем считать, что $t_s = \tau$ и $t_1 > 1$.

Оценим разности $|t_{i+1} - t_i|$, то есть количество тактов работы автомата между соседними пустыми состояниями магазина. Очевидно, максимальное количество тактов достигается в случае, если автомат проходит последовательно все состояния, кроме последнего, записывая максимально возможное количество символов в магазин, а в последнем состоянии стирает все символы. То есть можно считать, что есть состояния, которые при непустом магазине пишут, а есть, которые стирают. Нетрудно видеть, что стирающих состояний не меньше s, так как $q(t_i - 1)$, где $i = 1, \ldots, s$, являются стирающими.

То есть на отрезке от t_i до t_{i+1} автомат может производить запись в магазин во всех нестирающих состояниях и в одном стирающем при пустом магазине в самом начале отрезка. То есть запись может происходить не более, чем в $n - s + 1$ состояниях и в итоге в магазине будет записано не более $(n - s + 1)k - (n - s)$ символов. Далее эти символы будут последовательно стираться из магазина. Из всего вышесказанного мы можем получить оценку. $n-s+1$ тактов автомат будет осуществлять запись, далее $(n-s+1)k-(n-s)$ тактов он будет стирать то, что записал, то есть:

$$\max_i |t_{i+1}-t_i| \leqslant n-s+1+(n-s+1)k-(n-s) = (n-s+1)k+1.$$

В целом описанная последовательность работы автомата может быть другой, но, очевидно, что от изменения последовательности действий оценка не изменится. Очевидно, что если на некотором отрезке от t_i до t_{i+1} запись в магазин осуществили все нестирающие состояния, то ни в каком другом отрезке такое уже повториться не может. Значит, для каждой последующей по максимальности разницы $|t_{i+1}-t_i|$ автомат будет осуществлять как минимум на одну запись в магазин меньше. Этого достаточно, чтобы произвести оценку:

$$\tau \leqslant |t_s-t_{s-1}|+|t_{s-1}-t_{s-2}|+\ldots+|t_2-t_1|+t_1 \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=0}^{s-1}((n-s+1-i)k) = s+\frac{1}{2}ks(2n-3s+3).$$

Максимизируя это выражение по s получаем, что максимум τ достигается при $s=\frac{2n+3+\frac{2}{k}}{6}$. Подставляя в выражение выше и, выполняя простые преобразования, получаем неравенство:

$$\tau \leqslant \frac{kn^2}{6}+\frac{(11n+14)k}{12}.$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим автономный инициальный автомат с магазинной памятью

$$P_{s,t}=\{Q\cup R, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, r_1, \lambda\},$$

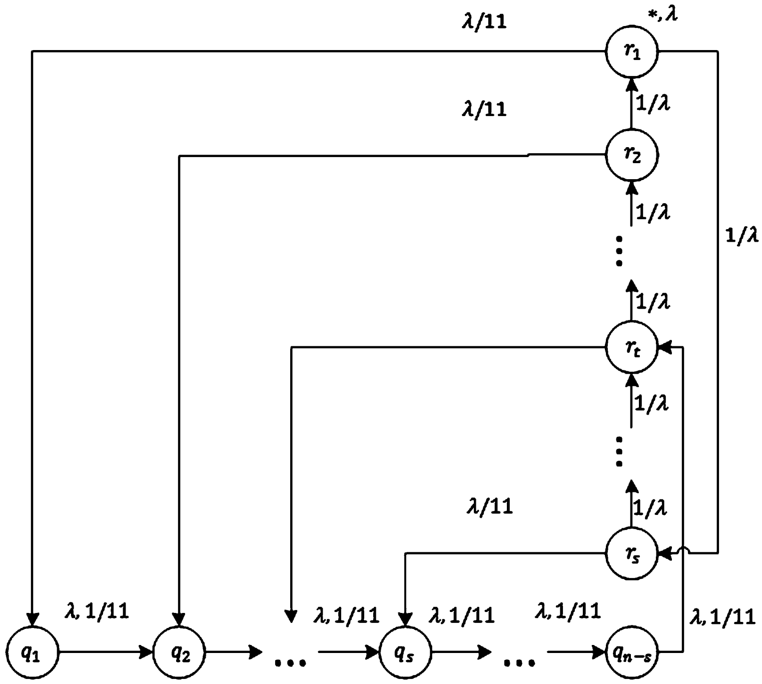
где $Q=\{q_1,\ldots,q_{n-s}\}$, $R=\{r_1,\ldots,r_s\}$, $1\leqslant s\leqslant n-s$, $B=Q\times(\Gamma\cup\lambda)$, $\Gamma=\{1\}$, $\psi(q,z)=(q,z)$,

$$\varphi(q,z)=\begin{cases} q_{i+1}, \text{ если } q=q_i,\ i\in\{1,\ldots,n-s-1\}, \\ r_t, \text{ если } q=q_{n-s}, \\ r_s, \text{ если } q=r_1, \\ r_{i-1}, \text{ если } q=r_i,\ i\in\{2,\ldots,s\} \end{cases}$$

Значение t подберем чуть позже.

$$\eta(q,z) = \begin{cases} \lambda, \text{ если } q \in R,\ z = 1, \\ 11, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном z/η, то есть из данного состояния, при значении верхнего символа магазина z, автомат записывает на выходную ленту пару (q,z), а в магазине стирает последний символ и дописывает слово η. Следующее состояние указывает стрелка.



После первого такта работы автомат переходит в состояние q_1. Далее он последовательно проходит все состояния группы Q, продолжая заполнять магазин. По достижению состояния q_{n-s} в магазине будет лежать слово длины $n-s+1$. Далее автомат переходит в состояние r_t из множества R, и, последовательно проходя по всем состояниям множества R, стирает символы из магазина до полного его опустошения. Выберем состояние r_t таким образом, чтобы после стирания последнего символа из магазина автомат приходил в состояние r_2.

Очевидно, что это можно сделать из условия, что $(n - s + 2 - t) \equiv 2 \mod s$, которое эквивалентно более простому

$$-t \equiv n \mod s.$$

Далее повторится аналогичная ситуация: автомат дойдет до состояния q_{n-s}, но в магазине будет лежать слово длины $n - s$ (на единицу меньшей длины). Следовательно процесс стирания остановится на состоянии r_3. Следующая итерация закончится на состоянии r_4 и так далее, пока мы опять не попадем в состояние r_1 с пустым магазином.

Подсчитаем длину периода выходной последовательности. На заполнение в первой итерации автомат проходит $n-s+1$ такт и в магазине после этого лежит слово длины $n - s + 2$, на стирание которого уйдет $n - s + 2$ такта. На каждую последующую итерацию необходимо на 2 такта меньше, так как на один символ автомат меньше записывает в магазин и соотвественно меньше стирает. То есть длина периода

$$\tau = \sum_{i=0}^{s-1}(2n - 2s + 3 - 2i) = 2ns - 3s^2 + 2s.$$

Максимизируя τ по s, получаем квадратичную от n зависимость с оценкой

$$\tau \geqslant \frac{n^2}{3} + \frac{35}{12}.$$

Данный пример демонстрирует достижимость квадратичной оценки при $k = 2$. Оказывается, что достижимость достигается при любом $k > 1$ в следующем смысле.

Теорема 3. *При фиксированном $k > 1$ и $n \to \infty$ выполнено*

$$L(n, 1, k) = \frac{kn^2}{6}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Из утверждения 1 следует оценка

$$L(n, 1, k) \leqslant \frac{kn^2}{6} + \frac{(11n + 14)k}{12} = \frac{kn^2}{6}(1 + o(1)).$$

Покажем, что аналогичная оценка может быть получена снизу. Модифицируем пример 1 для общего случая. Сначала изменим функцию записи в магазин η, исправив все непустые значения на 1^k. Тогда, повторяя рассуждения из примера 1, получаем, что в первой итерации на запись автомат проходит $n-s+1$ такт и при этом в магазине будет записан $(k-1)(n-s+1)+1$ символ. С каждой последующей итерацией на запись будет тратиться на 1 такт меньше, а в магазине будет на $k-1$ символ меньше. Следовательно, имеют место формула для длины периода τ:

$$\tau \leqslant \sum_{i=0}^{s-1}((n-s+1-i)+((k-1)(n-s+1-i)+1)) = \\ = \sum_{i=0}^{s-1}((n-s+1-i)k+1) = \frac{2n-3s+3}{2}sk+s.$$

Неравенство стоит потому, что может оказаться, что автомат будет достигать пустого магазина не на всем множестве состояний R, а лишь не некотором подмножестве. Примером такого подмножества может служить множество состояний из R с четными номерами. Достаточным условием, чтобы достигался пустой магазин во всех состояния из R, является взаимная простота чисел $k-1$ и s. В тех случаях, где это условие выполнено оценка достигается.

Если же $(k-1,s)=d>1$, то мы получаем, что в текущем автомате только в $\frac{s}{d}$ состояниях из R достигается пустой магазин. Мы можем подправить значения $\eta(r_i,\lambda)$, где $r_i \in R$ таким образом, чтобы автомат мог достигать пустого магазина на всем множестве состояний R, уменьшая количество записываемых символов на $d+1-i$. Очевидно, оценка на τ полученная выше уменьшится на $\sum\limits_{i=1}^{s}(d+1-i) \leqslant sk$.

Таким образом, можем записать, что

$$\max_s\left(\frac{2n-3s+1}{2}sk+s\right) \leqslant \tau \leqslant \max_s\left(\frac{2n-3s+3}{2}sk+s\right).$$

Максимизируя по s получаем, что $s \sim \frac{n}{3}$. Подставляя в выражения выше получаем, что $\tau \sim \frac{kn^2}{6}$, что и завершает доказательство.

3. Оценки для неавтономного автомата с магазинной памятью

Для формулировки результатов для общего неавтономного случая введем операцию суперпозиции конечного автомата и автомата с магазинной памятью.

Пусть дан инициальный конечный автомат $V = \{A, Q_V, B, \varphi_V, \psi_V, q_0\}$, который задает ограниченно-детерминированную функцию $f_V : A^* \to B^*$, и инициальный автомат с магазинной памятью

$P = \{B, Q_P, C, \Gamma, \varphi_P, \psi_P, \eta_P, r_0, \gamma_0\}$, который задает детерминированное отображение $f_P : B^* \to C^*$. Тогда суперпозицией конечного автомата V и P будем называть отображение $f_{P \circ V} : A^* \to C^*$, где $f_{P \circ V}(\alpha) = f_P(f_V(\alpha))$.

Утверждение 2. *Пусть* $V = \{A, Q_V, B, \varphi_V, \psi_V, q_0\}$ *— инициальный конечный автомат,*

$P = \{B, Q_P, C, \Gamma, \varphi_P, \psi_P, \eta_P, r_0, \gamma_0\}$ *— инициальный автомат с магазинной памятью. Тогда суперпозиция* V *и* P $f_{P \circ V} : A^* \to C^*$ *является детерминированной функцией, порожденной инициальным автоматом*

$$P_V = \{A, Q_V \times Q_P, C, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, (q_0, r_0), \gamma_0\},$$

где

$$\varphi(a, (q_V, q_P), z) = (\varphi_V(a, q_V), \varphi_P(\psi_V(a, q_V), q_P, z)),$$
$$\psi(a, (q_V, q_P), z) = \psi_P(\psi_V(a, q_V), q_P, z),$$
$$\eta(a, (q_V, q_P), z) = \eta_P(\psi_V(a, q_V), q_P, z).$$

Доказательство. Для доказательства утверждения необходимо рассмотреть системы канонических уравнений автоматов V и P и подставить первую во вторую.

Теперь сформулирует и докажем оценки в случае неавтономного автомата с магазинной памятью.

Утверждение 3. *Пусть* $P = \{A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0\}$ *— автомат с магазинной памятью и пусть* $|\Gamma| = 1$ *Тогда длина периода периодической последовательность, которую* P *генерирует, получая на вход периодическую последовательность периода* τ*, не больше, чем*

$$\frac{k(n\tau)^2}{6}+\frac{(11n\tau+14)k}{12},$$

где $n=|Q|$, $k=\max\limits_{(q,z)\in Q\times\Gamma\cup\{\lambda\}}|\eta(q,z)|$, *причем* $k>1$.

Доказательство. Не ограничивая общность, будем рассматривать входную последовательность без предпериода. Пусть V — конечный автомат с τ состояниями, генерирующий эту посделовательность. Рассмотрим теперь суперпозицию конечного автомата автомата V и автомата с магазинной памятью P, которая в силу предыдушего утверждения и того, что автомат V автономный, является автономным автоматом с магазинной памятью с $\tau|Q|$ состояниями. К этому автомату применяем теорему об длине периода выходной последовательности для автономного автомата с магазинной памятью, что и завершает доказательство.

Пример 2. Построим автомат с магазинной памятью, у которого период выходной последовательсти квадратично зависит от периода входной.

Рассмотрим инициальный автомат с магазинной памятью

$$P_{s,t}=\{A,Q\cup R,B,\Gamma,\varphi,\psi,\eta,r_1,\lambda\},$$

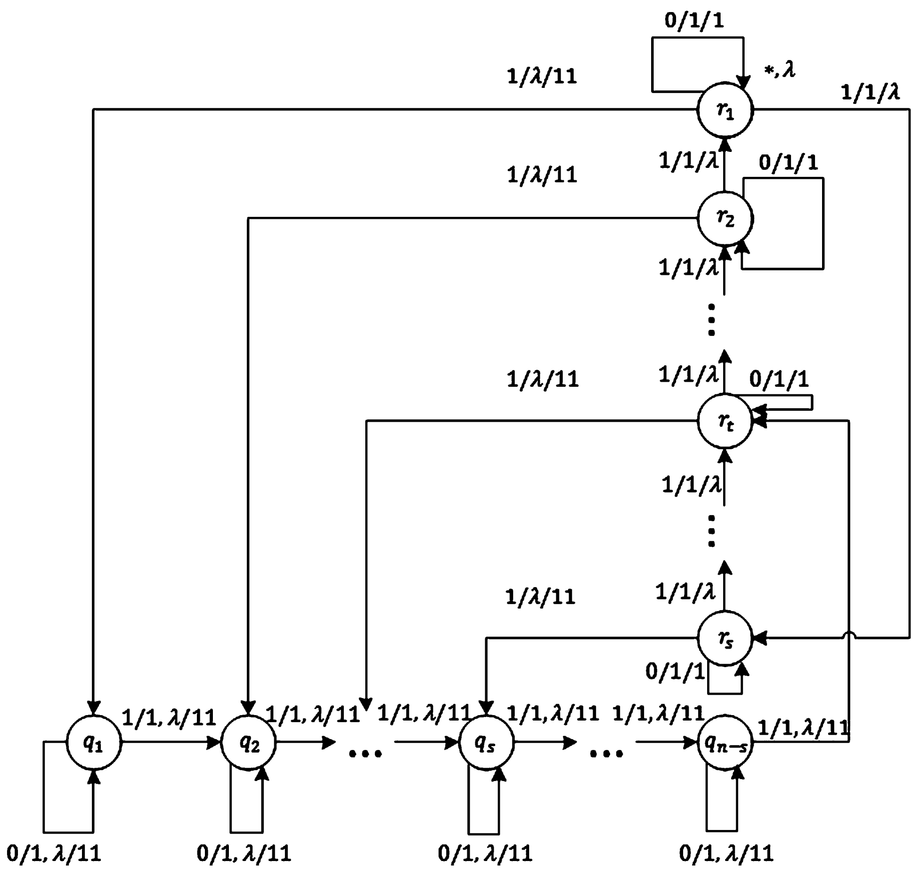
где $A=\{0,1\}$, $Q=\{q_1,\ldots,q_{n-s}\}$, $R=\{r_1,\ldots,r_s\}$, $1\leqslant s\leqslant n-s$, $B=Q\times(\Gamma\cup\lambda)$, $\Gamma=\{1\}$, $\psi(a,q,z)=(q,z)$,

$$\varphi(a,q,z)=\begin{cases}q,\ \text{если } a=0,\\ q_{i+1},\ \text{если } a=1,\ q=q_i,\ i\in\{1,\ldots,n-s-1\},\\ r_t,\ \text{если } a=1,\ q=q_{n-s},\\ r_s,\ \text{если } a=1,\ q=r_1,\\ r_{i-1},\ \text{если } a=1,\ q=r_i,\ i\in\{2,\ldots,s\}\end{cases}$$

Значение t подберем чуть позже.

$$\eta(a,q,z)=\begin{cases}\lambda,\ \text{если } a=1,\ q\in R,\ z=1 \text{ или } a=0,\ q\in R,\ z=\lambda,\\ 1,\ \text{если } a=0,\ q\in R \text{ и } z=1,\\ 11,\ \text{иначе.}\end{cases}$$

Ниже приведем диаграмму этого автомата. Переходы автомата описываются следующим шаблоном $a/z/\eta$, то есть из данного состояния, при подаче на вход символа a и верхнего символа магазина z в магазине стирается последний символ и дописывается слово η. Следующее состояние указывает стрелка.



На вход автомату будем подавать периодическую последовательность α^∞, где $\alpha = 10^{p-1}$. После первого такта работы автомат переходит в состояние q_1. Далее он проходит все состояния группы Q, оставаясь в одном состоянии ровно p тактов и продолжая заполнять магазин. По достижению состояния q_{n-s} в магазине будет лежать слово длины $(n-s-1)p+1$. Через p тактов автомат переходит в состояние r_t из множества R, и, проходя по всем состояниям множества R, стирает символы из магазина при поялении единицы на вход до полного его опустошения. Выберем состояние r_t таким образом, чтобы после стирания последнего символа из магазина автомат приходил в состояние r_2. Очевидно, что это можно сделать из условия, что $(n-s+2-t) \equiv 2 \mod s$, которое эквивалентно более простому

$$-t \equiv n \mod s.$$

Далее повторится аналогичная ситуация: автомат дойдет до состояния q_{n-s}, но в магазине будет лежать слово длины $(n-s-2)p+1$ (на p меньшей длины). Следовательно процесс стирания остановится на состоянии r_3. Следующая итерация закончится на состоянии r_4 и так далее, пока мы опять не попадем в состояние r_1 с пустым магазином.

Подсчитаем длину периода выходной последовательности. На заполнение в первой итерации автомат проходит $(n-s+1)p$ такт и в магазине после этого лежит слово длины $(n-s)p+1$, на стирание которого уйдет $(n-s)p+1$ тактов. На каждую последующую итерацию необходимо на $p+p^2$ такта меньше, так как на p символов автомат меньше записывает в магазин и соотвественно меньше стирает. То есть длина периода

$$\tau = \sum_{i=0}^{s-1}((n-s+1-i)p + ((n-s-i)p+1)p) =$$
$$= \frac{2n-3s+1}{2}p^2 s + \frac{2n-3s+5}{2}ps.$$

Максимизируя τ по s, получаем квадратичную от n зависимость с оценкой, получаем, что $s \sim \frac{n}{3}$, а

$$\tau \sim \frac{n^2(p+p^2)}{6}.$$

Данный пример демонстрирует достижимость квадратичной оценки при $k=2$. Однако эта оценка не совпадает с оценкой полученной в утверждении 3.

Для автомата с магазинной памятью P и периодической входной последовательности периода p обозначим $L(P,p)$ максимальную длину периода выходной периодической последовательности, которую он генерирует. То есть существует такое слово $\alpha \in A^p$, что при подаче α^∞ на вход P период выходной последовательности будет равен

$L(P,p)$, и для любого $\beta \in A^p$ при подаче на вход β^∞ длина выходной последовательности будет не больше $L(P,p)$. Нас будет интересовать максимальная длина периода в классе автоматов $\mathcal{M}(n,m,k)$ при фиксированном периоде входной последовательности, а именно:

$$L(n,m,k,p) = \max_{P \in \mathcal{M}(n,m,k)} L(P,p).$$

Оказывается, что оценку сверху, действительно, можно улучшить.

Утверждение 4. *При фиксированных натуральных $k > 1$, p и $n \to \infty$ выполнено*

$$L(n,1,k,p) \lesssim \frac{n^2(p^2(k-1)+p)}{6}.$$

Доказательство. Зафиксируем $k > 1$. Мы доказали, что $L(n,1,k) \sim \frac{kn^2}{6}$. Рассмотрим работу автономного автомата с магазинной памятью, на котором достигается эта оценка. Любой такт его работы может быть либо стирающим, либо записывающим, либо работа с магазином вообще не ведется. Обозначим количества этих тактов через f_1, f_2, f_3 соотвественно. Несложно видеть, что $f_3 = o(n^2)$. Поэтому можно считать, что $L(n,1,k) \sim f_1(n,k)+f_2(n,k)$. Очевидно, что каждый записывающий такт порождает не более $k-1$ стирающих, причем в экстремальном случае это оценка достигается. Таким образом, можно сделать вывод, что

$$f_1(n,k) \lesssim \frac{n^2(k-1)}{6},\ \ f_2(n,k) \lesssim \frac{n^2}{6}.$$

При добавлении входа к автомату и подачи периодической последовательности периода p мы можем утверждать, что запишем в магазин не более, чем в p раз больше символом, а стирать их будем в более, чем в p раз медленнее. Отсюда получаем оценки

$$L(n,1,k,p) \sim f_1(n,k,p) + f_2(n,k,p) \lesssim$$
$$\lesssim p^2 f_1(n,k) + p f_2(n,k) \sim \frac{n^2(p^2(k-1))}{6} + \frac{n^2 p}{6},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Доказанное выше утверждение можно трактовать следующим образом: не все стирания, можно сделать в p раз медленне, а именно, стирание верхнего символа магазина при его чтении. Этот факт и влияет на оценку.

Теорема 4. *При фиксированных натуральных $k > 1$, p и $n \to \infty$ выполнено*

$$L(n,1,k,p) = \frac{n^2(p^2(k-1)+p)}{6}(1+o(1)).$$

Доказательство. Из утверждения 4 следует оценка следует оценка сверху.

Покажем, что аналогичная оценка может быть получена и снизу. Модифицируем пример 2 для общего случая. Сначала изменим функцию записи в магазин η, исправив все значения 11 на 1^k. Тогда, повторяя рассуждения из примера 2, получаем, что в первой итерации на запись автомат проходит $(n-s+1)p$ такт и при этом в магазине будет записан $(k-1)p(n-s)+1$ символ. С каждой последующей итерацией на запись будет тратиться на p тактов меньше и в магазине будет на $p(k-1)$ символ меньше. Следовательно, имеют место формула для длины периода τ:

$$\tau \leqslant \sum_{i=0}^{s-1}((n-s+1-i)p + ((n-s-i)p(k-1)+1)p) =$$
$$= \frac{2n-3s+5}{2}ps + \frac{2n-3s+1}{2}p^2s(k-1).$$

Неравенства стоит потому, что может оказаться, что автомат будет достигать пустого магазина не на всем множестве состояний R, а лишь не некотором подмножестве. Достаточным условием, чтобы достигался пустой магазин во всех состояния из R, является взаимная простота чисел $(k-1)p$ и s. В тех случаях, где это условие выполнено оценка достигается.

Если же $((k-1)p, s) = d > 1$, то мы получаем, что в текущем автомате только в $\frac{s}{d}$ состояниях из R достигается пустой магазин. Мы можем подправить значения $\eta(1, r_i, \lambda)$, где $r_i \in R$ таким образом, чтобы автомат мог достигать пустого магазина на всем множестве состояний R, уменьшая количество записываемых символов. Очевидно, оценка на τ полученная выше уменьшится не более, чем на sk.

Таким образом, можем записать, что

$$\max_s\left(\frac{2n-3s+5}{2}ps + \frac{2n-3s+1}{2}p^2s(k-1) - sk\right) \leqslant \tau \leqslant$$
$$\leqslant \max_s\left(\frac{2n-3s+5}{2}ps + \frac{2n-3s+1}{2}p^2s(k-1)\right).$$

Максимизируя по s получаем, что $s \sim \frac{n}{3}$. Подставляя в выражения выше, получаем необходимую оценку снизу, что и завершает доказательство.

4. Заключение

В работе были изучены периодические свойства автоматных функций для класса автоматов с магазинной памятью с однобуквенным алфавитом магазина. Этот класс является естественным расширением класса конечных автоматов. Основным результатом работы можно считать теорему 4, в которой показано, что период выходной последовательности квадратично зависит от периода входной и квадратично зависит от числа состояний.

Список литературы

[1] Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Том 1. — М.: Мир, 1978.

[2] Иванов И. Е. Некоторые классы функций, вычислимые автоматами // Интеллектуальные системы. — 2011. Т. 15, вып. 1–4. — С. 361–378.

[3] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[4] Иванов И. Е. О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью // Интеллектуальные системы. — 2014. Т. 18, вып. 1. — С. 243–251.