Расшифровка полиномиальных функций ранжирования

С. И. Хегай

В работе рассматривается задача расшифровки полиномиальных функций ранжирования. В случае когда функция ранжирования зависит от известной переменной линейно предложен алгоритм расшифровки с точностью до мультипликативного множителя с известной погрешностью, а так же его оценка сложности. Представлен класс функций, для которых существует алгоритм, определяющий для какой из переменных соответствующий моном имеет наименьшую степень и наименьший по модулю старший коэффициент. Дана оценка сложности данного алгоритма.

Ключевые слова: расшифровка функций, функции ранжирования, продвижение веб-сайтов.

1. Введение

Интенсивное развитие веб-технологий привело к появлению на рынке компаний, предлагающих услуги по продвижению веб-сайтов. Задача таких компаний состоит в том, чтобы для заданного поискового запроса так изменить исходный веб-сайт, чтобы он оказался в первых строчках выдачи интернет-поисковиков по данному запросу. Предположим, что при фиксированном поисковом запросе интернет-поисковик каждому веб-сайту сопоставляет некоторый вектор n-мерного евклидова пространства, называемый вектором сайта. Предположим нам известна эта функция сопоставления. Предположим также, что существует некая функция ранжирования в соответствии с которой интернет-поисковик упорядочивает вектора, соответствующие сайтам, и в таком порядке выводит ответ на данный запрос. Будем полагать, что функция ранжирования нам не известна, но мы хотели бы ее узнать, поскольку это поможет вывести наш сайт в верхние строчки списка поисковика.

Стандартная процедура расшифровки функций, предполагающая возможность спросить у оракула значение функции на векторе значений аргументов, здесь не пройдет, поскольку если даже предположить, что мы сможем сформировать сайт с заданным вектором сайта, то поисковик не сообщит нам значение функции ранжирования на данном векторе. Зато если мы сформируем два сайта с разными векторами, то мы сможем узнать на каком из этих векторов значение функции ранжирования больше, только взглянув какой из сайтов выше в списке. Тем самым у нас возникает задача расшифровки с новым видом запросов к оракулу, который назовем запросом на сравнение.

Итак, пусть нам дано множество F функций ранжирования, действующих из R^n в R. Пусть f некоторая неизвестная функция из F. Запросом на сравнение называется пара точек (a, b). Ответом на запрос (a, b) называется число $\mathtt{sign}(f(a) - f(b))$. Нам разрешается задавать любые запросы на сравнение и с помощью них хочется расшифровать функцию f.

В работе показывается, что если множество функций ранжирования F есть множество полиномов от многих переменных таких, что каждый моном полинома является функцией одной переменной, причем среди мономов существует хотя бы один моном степени 1, то есть функция ранжирования зависит линейно от какой-то из переменных, причем указано от какой, то каждая функция из этого класса может быть расшифрована с точностью до множителя с наперед заданной точностью. Причем, если заведомо известно, что на рассматриваемом отрезке полиномы ограничены константой, то дана оценка количества запросов на сравнение алгоритма расшифровки.

Представлен класс функций, для которых можно отыскать номер переменной по которой эта функция зависит линейно, если известно, что хотя бы одна такая переменная существует. Для того же класса функций дана оценка количества запросов на сравнение алгоритма нахождения монома с наименьшей степенью и наименьшим значением модуля старшего коэффициента.

Автор выражает благодарность профессору Э. Э. Гасанову за научное руководство и помощь в работе.

2. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть Φ_n — некоторый класс функций, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Отображение вида $\chi : \Phi_n \to \mathbb{Z}$ назовем *характеристикой функций из* Φ_n. Если $f \in \Phi_n$, то значение $\chi(f)$ назовем *характеристикой функции* f из Φ_n.

Под *запросом на сравнение* будем понимать пару наборов (a, b) значений переменных функции f, где $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Под *ответом на запрос на сравнение* знак разности значений функции на этих наборах, то есть число $\mathtt{sign}(f(a) - f(b))$.

Под *алгоритмом расшифровки* будем понимать условный эксперимент, который последовательно генерирует запросы на сравнение в зависимости от ответов на предыдущие запросы. Будем говорить, что *алгоритм расшифровывает характеристику* χ функции f *из* Φ_n, если значения ответов на запросы на сравнение, сгенерированные условным экспериментом, однозначно определяют число $\chi(f)$ при условии, что $f \in \Phi_n$. Скажем, что *алгоритм расшифровывает характеристику функций из* Φ_n, если он расшифровывает характеристику каждой функции f из Φ_n.

Множество всех алгоритмов, расшифровывающих характеристику χ функций из класса Φ_n, обозначим через $\mathcal{A}(\Phi_n, \chi)$.

Сложностью $\varphi(A, \chi, f)$ *алгоритма* A *на характеристике* χ *функции* f будем называть число запросов на сравнение, требуемое алгоритму A для расшифровки характеристики χ функции f. Будем называть *сложностью алгоритма* A *для характеристики* χ *на классе* Φ_n величину $\varphi(A, \Phi_n, \chi) = \max\limits_{f \in \Phi_n} \varphi(A, \chi, f)$.

Функцию $\varphi(\Phi_n, \chi) = \min\limits_{A \in \mathcal{A}(\Phi_n, \chi)} \varphi(A, \Phi_n, \chi)$ будем называть *сложностью расшифровки характеристики* χ *на классе* Φ_n.

Результаты по расшифровке линейных функций ранжирования, то есть функций вида $f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + c_{n+1}$, где $c_i \in \mathbf{R}, i = 1, \ldots, n+1$, могут быть найдены в [1].

В данной работе рассматривается случай, когда функция ранжирования зависит от каждой переменной полиномиально.

В частности, когда известно, что функция ранжирования имеет линейную зависимость по одной из переменных приводится алгоритм, который позволяет расшифровать функцию ранжирования на отрезке с точностью до мультипликативного множителя с наперед заданной погрешностью.

Пусть D — некоторое множество действительных чисел.

Пусть P_D — подмножество класса полиномиальных функций, действующих из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, определенных следующим образом:

$$P_D = \big\{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x \ : \ n \in \mathbb{N}, a_i \in D, i = 1, \ldots, n, a_n \neq 0\big\}.$$

Заметим, что свободные члены в функциях отсутствуют, так как их значения не влияют на разность значений этих функций.

Обозначим $P_D^k = \{f \mid f \in P_D, deg(f) \leqslant k\}$, где $k \in \mathbb{N}$, $deg(f)$ — это степень полинома f.

Будем рассматривать следующий класс функций ранжирования

$$\Psi_D^{n,m} = \left\{\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \ : \ f_i \in P_D^n, i = 1, \ldots, m\right\},$$

где D — это параметр отвечающий за ограничение коэффициентов полиномов, входящих в сумму, а n — натуральное число, отвечающее за максимальную степень этих полиномов, m — натуральное число, задающее арность функций, то есть определяющее число переменных, от которых зависит функция. Варьируя множество D получим разные классы функций.

В случае, когда $D = \mathbb{R}$, будем рассматривать в качестве функций ранжирования функции, которые хотя бы от одной переменной зависят линейно. Без ограничения общности будем считать, что эти функции зависят линейно от последней переменной, то есть будем рассматривать следующий класс функций ранжирования

$$\Psi_{\mathbb{R}}^{n,m,L} = \left\{\sum_{i=1}^{m-1} f_i(x_i) + a_m x_m \ : \ f_i \in P_{\mathbb{R}}^n, i = 1, \ldots, m-1, a_m \neq 0\right\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{C}^n = \{C \subset \mathbb{R} \ : \ |C| = n+1\}, \qquad (1)$$

то есть $\mathcal{C}^n$ — это множество всевозможных множеств из $n+1$ попарно различных вещественных чисел.

Так же обозначим

$$\mathcal{E}_\varepsilon^n = \{E \subset \mathbb{R} \ : \ |E| = n+1, \ |e| \leqslant \varepsilon, \forall e \in E\}, \tag{2}$$

то есть $\mathcal{E}_\varepsilon^n$ — это множество всевозможных множеств из $n+1$ вещественных чисел по модулю не превосходящих ε.

Если $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\} \in \mathcal{C}^n$, $\varepsilon > 0$ и $E = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} \in \mathcal{E}_\varepsilon^n$, то обозначим

$$M^{C,E}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-c_i)\omega'(c_i)} \varepsilon_i, \tag{3}$$

где $\omega(x) = \prod\limits_{i=0}^{n} (x - c_i)$, $\omega'(x)$ — производная функции $\omega(x)$.

Если $[a,b]$ — отрезок вещественной прямой, то число

$$M_{a,b}^{C,\varepsilon} = \sup_{E \in \mathcal{E}_\varepsilon^n} \sup_{x \in [a,b]} |M^{C,E}(x)| \tag{4}$$

назовем *коэффициентом погрешности расшифровки на отрезке* $[a,b]$ в точках C.

Для вещественного числа a через $[a]$ обозначим целую часть числа a, а через $]a[$ — наименьшее целое не меньшее чем a.

Теорема 1. *Если* $\psi(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m-1} f_i(x_i) + a_m x_m \in \Psi_{\mathbb{R}}^{n,m,L}$, $C \in \mathcal{C}^n$, *причем* $\forall c \in C$ $c \in [a,b]$, *и для любого номера* $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ *на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f_i(x)$ *удовлетворяет условию* $\frac{|f_i(x)|}{|a_m|} < M$, *то существует такой алгоритм расшифровки функций из класса* $\Psi_{\mathbb{R}}^{n,m,L}$, *что для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *по результатам применения этого алгоритма расшифровки к функции* $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ *может быть построена такая функция* $\widehat{\psi}(x_1, \ldots, x_m)$, *что на множестве* $[a,b]^{m-1} \times \mathbb{R}$ *выполняется*

$$\left| \widehat{\psi}(x_1, \ldots, x_m) - \psi(x_1, \ldots, x_m)/|a_m| \right| \leqslant (m-1) M_{a,b}^{C,\varepsilon}.$$

Причем на это потребуется не более чем $(m-1)(n+1)(]\log_2 \frac{M}{\varepsilon}[+1) + 1$ *запросов на сравнение.*

Обозначим $D_M = \{-M, -M+1, \ldots, M-1, M\}$, где $M \in \mathbb{N}$.

Пусть $f(x) \in P_{D_M}$. Обозначим за $hst(f)$ старший ненулевой коэффициент функции $f(x)$.

Теорема 2. *Существует такой алгоритм расшифровки функций из класса* $\Psi_{D_M}^{n,m}$, *что для любой функции* $\psi(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i)$ *из* $\Psi_{D_M}^{n,m}$ *он позволяет за не более чем* $2m-1$ *запросов на сравнение определить такой номер* $i_0\in\{1,\ldots,m\}$, *что для любого другого номера* $i\in\{1,\ldots,m\}$ *выполнено либо* $deg(f_{i_0})\leqslant deg(f_i)$, *либо* $deg(f_{i_0})=deg(f_i)$ *и* $|hst(f_{i_0})|\leqslant|hst(f_i)|$.

Следствие 1. *Если* $\psi(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i)\in\Psi_{D_M}^{n,m}$ *и среди функций* $f_i(x)$, $i=1,\ldots,m$, *есть хотя бы одна линейная, то существует алгоритм расшифровки, который выявляет по какой из переменных функция* $\psi(x_1,\ldots,x_m)$ *зависит линейно.*

3. Доказательство теоремы 1

Через a^i, $a\in\mathbb{R}$, $i\in\{1,2,\ldots,m\}$, обозначим вектор из $\mathbb{R}^m$, у которого на i-м месте стоит число a, а в остальных позициях число 0. В частности, 0^1 — это нулевой вектор.

Пусть у нас есть некая функция $\phi(x_1,\ldots,x_m)=f_1(x_1)+\ldots+f_m(x_m), m\in\mathbb{N}, m>1$. Рассмотрим запрос на сравнение (a^i,b^j), $1\leqslant i,j\leqslant m$. Очевидно, что данный запрос будет сравнивать значение функции $f_i(x)$ в точке a со значением функции $f_j(x)$ в точке b, поскольку ответ на этот запрос равен $\mathtt{sign}(f_i(a)-f_j(b))$.

Пусть $\psi(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{i=1}^{m-1} f_i(x_i)+a_m x_m\in\Psi_{\mathbb{R}}^{n,m,L}$. Рассмотрим характеристику $S_m(\psi)=\mathtt{sign}(a_m)$.

Лемма 1. *Имеет место равенство* $\varphi(\Psi_{\mathbb{R}}^{n,m,L},S_m)=1$.

Доказательство. Действительно, характеристика $S_m(\psi)$ может быть расшифрована с помощью одного запроса на сравнение, а именно $(1^m,0^1)$.

Возьмем произвольную функцию $\phi(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{i=1}^{m-1} g_i(x_i)+a_m x_m\in\Psi_{\mathbb{R}}^{n,m,L}$.

Согласно лемме 1 мы за один запрос на сравнение можем узнать знак числа a_m, поэтому без ограничения общности можем считать, что $a_m>0$. Но само число a_m нам узнать затруднительно. Поэтому приняв величину a_m за единицу мы подсчитаем относительного него все остальные коэффициенты.

Тем самым фактически мы вместо функции $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ будем расшифровывать функцию $\psi(x_1, \ldots, x_m) = \phi(x_1, \ldots, x_m)/a_m = \sum_{i=1}^{m-1} f_i(x_i) + x_m$, где $f_i = g_i/a_m$, $i = 1, \ldots, m-1$.

Заметим, что $\psi(b^m) = b$, тем самым запрос на сравнение (a^i, b^m) позволяет сравнивать $f_i(a)$ с числом b.

Для того чтобы расшифровать $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ нужно для функций $f_i(x), i = 1, \ldots, m-1$, определить ее коэффициенты.

Покажем как этого можно добиться, используя линейную функцию.

Зафиксируем произвольное действительное число a отличное от нуля. Попытаемся определить значение функции $f_i(x)$ в точке a.

Алгоритм определения значения $f_i(a)$ будет состоять из двух этапов. На первом этапе будет определяться отрезок, в котором лежит значение $f_i(a)$. А на втором этапе это значение будем находить с некоторой наперед заданной точностью ε.

Первый этап. Один из концов искомого отрезка закрепим в точке 0. На первом шаге подадим запрос $(a^i, 0)$, по знаку ответа на запрос определим на какой полупрямой расположен второй конец искомого отрезка. Если знак ответа на запрос положительный, то второй конец следует искать на положительной полупрямой. Если знак отрицательный, то соответственно на отрицательной.

Рассмотрим случай когда второй конец лежит на положительной полупрямой. Тогда будем подавать запросы на сравнение (a^i, b_k^m), где $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — это произвольная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Положим $b_0 = 0$. Запросы будем подавать до тех пор, пока не найдется такое число K, что результат на запрос (a^i, b_K^m) будет отрицательным или равным нулю. Если результат равен 0, то значение функции $f_i(x)$ в точке $x = a$ положим равным b_K и второй этап алгоритма для данной точки не применяется. Иначе за искомый отрезок принимаем $[b_{K-1}, b_K]$.

В случае, когда второй конец лежит на отрицательной полупрямой, будем подавать запросы $(a^i, (-b_k)^m)$, где $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — это произвольная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Как и ранее, положим $b_0 = 0$. Запросы будем подавать до тех пор, пока не найдется такое число K, что результат на запрос $(a^i, (-b_K)^m)$ будет положительным или равным нулю. Если результат равен 0 то значение функции $f_i(x)$ в точке $x = a$ положим равным

$-b_K$. В этом случае второй этап алгоритма для данной точки не применяется. Иначе за искомый отрезок принимаем $[-b_K, -b_{K-1}]$.

Второй этап. Пусть значение функции $f_i(x)$ в точке a лежит в отрезке $[c,d]$. Найдем значение функции $f_i(x)$ в точке a с точностью до ε следующим образом.

Введем характеристику $V_{i,a}^{\varepsilon,c,d}(\psi) = [\frac{f_i(a)-c}{\varepsilon}]$, $\varepsilon \in (0,1)$. Эта характеристика поможет вычислить значение функции $f_i(x)$ в точке a с точностью до ε при условии, что оно принадлежит отрезку $[c,d]$.

Лемма 2. *Для любых* $i \in \{1,\ldots,m-1\}$, $\varepsilon \in (0,1)$, $c,d,a \in \mathbb{R}$ *таких, что* $c < d$, $f_i(a) \in [c,d]$, *имеет место равенство* $\varphi(\Psi_{\mathbb{R}}^{n,m,L}, V_{i,a}^{\varepsilon,c,d}) =]\log_2 \frac{d-c}{\varepsilon}[$.

Доказательство. Если $\varepsilon \geqslant d-c$, то положим $V_{i,a}^{\varepsilon,c,d}(\psi) = 0$. В этом случае на не потребовался ни один запрос на сравнение. В противном случае поделим отрезок $[c,d]$ на непересекающиеся отрезки длины ε. Очевидно, что характеристика $V_{i,a}^{\varepsilon,c,d}$ показывает номер отрезка длины ε в который попадает величина $f_i(a)$.

Пусть $t = c+(d-c)/2$. Задав запрос на сравнение (a^i, t^m), мы сравним $f_i(a)$ со значением функции $f_i(x)$ в середине отрезка $[c,d]$. Далее, действуя аналогично, мы бинарным поиском за $]\log_2 \frac{d-c}{\varepsilon}[$ запросов на сравнение можем найти номер $V_{i,a}^{\varepsilon,c,d}$.

Понятно, что из мощностных соображений за меньшее число запросов найти величину $V_{i,a}^{\varepsilon,c,d}$ в общем случае нельзя.

Замечание. К сожалению, в приведенном выше алгоритме, в частности в первой части, невозможно дать никакой точной оценки на количество требуемых запросов. Для того чтобы дать подобную оценку, будем считать, что на конкретном отрезке рассматриваемые полиномы по модулю ограничены наперед известным числом $M > 0$. Тогда в условиях леммы 2 можно считать, что если $f_i(a) > 0$, то отрезок $[c,d] = [0,M]$, если же $f_i(a) < 0$, то $[c,d] = [-M,0]$.

Итак, за значение функции $f_i(x)$ в точке a возьмем значение полученное на первом шаге алгоритма, если второй шаг не выполнялся. Если же второй шаг выполнялся то за значение функции возьмем число равное $c + \varepsilon * V_{i,a}^{\varepsilon,c,d}(\psi)$.

В полиноме $f_i(x)$ имеется n_i неизвестных коэффициентов. Выберем еще n_i произвольные различные точки и найдем значения функции $f_i(x)$ в этих точках. Таким образом мы получили таблицу значений функций, состоящую из n_i+1 строки.

Получили n_i+1 пару «аргумент — значение функции». Применим интерполяционую формулу Лагранжа. Согласно [2] и сделанным предположениям полученный полином $f_i'(x)$ будет полиномом степени n_i, значения которого будут отличаться от значений искомого полинома $f_i(x)$ в $\frac{1}{|a_m|}$ раз, не считая погрешность, внесенную при измерении значений функции.

Лемма 3. *Пусть* $f(x) \in P^n_{\mathbb{R}}$ *— полином степени* n*. Пусть* $\varepsilon \in (0,1)$*. Пусть* $\widehat{y_i}$ *— приближенные значения функции* $f(x)$ *в точках* x_i*,* $i = 0,1,\dots,n$*, такие, что* $|f(x_i) - \widehat{y_i}| < \varepsilon$*. Пусть* $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}\widehat{y_i}$ *— интерполянта в точках* $(x_i, \widehat{y_i}), i = 0,1,\dots,n$*;* $[a,b]$ *— произвольный отрезок и* $C = \{x_0,\dots,x_n\}$*. Тогда на отрезке* $[a,b]$ *верно, что* $|f(x) - L_n(x)| \leqslant M^{C,\varepsilon}_{a,b}$*, где* $M^{C,\varepsilon}_{a,b} = \sup\limits_{|\varepsilon_i|\leqslant\varepsilon}\sup\limits_{x\in[a,b]} |\sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}\varepsilon_i|$*,* $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$*.*

Доказательство. Рассмотрим интерполянту $L_n(x)$. Пусть $\widehat{y_i} = y_i + \varepsilon_i$, где $|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon$, а $y_i = f(x_i)$. Тогда

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}y_i + \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}\varepsilon_i.$$

Но $\sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}y_i = f(x)$, так как $f(x)$ — полином степени n, а значит совпадает со своей интерполянтой [2].

Тогда

$$|f(x) - L_n(x)| = |\sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}\varepsilon_i| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |\sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}\varepsilon_i|$$
$$\leqslant \sup_{|\varepsilon_i|\leqslant\varepsilon}\sup_{x\in[a,b]} |\sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}\varepsilon_i| = M^{C,\varepsilon}_{a,b}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\psi(x_1,\dots,x_m) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_{m-1}(x_{m-1}) + a_m x_m \in \Psi^{n,m,L}_{\mathbb{R}}$.

Зафиксируем множество точек интерполяции $C = \{c_0, \ldots, c_n\} \in \mathcal{C}^n$.

Пусть для любых $i \in \{1, \ldots, m-1\}, x \in [a,b]$ известно, что $\frac{|f_i(x)|}{|a_m|} \leqslant M$.

Из леммы 1 следует, что знак коэффициента a_m можно выяснить за один запрос на сравнение.

Теперь для каждого номера $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ и каждого номера $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ проделаем следующее. За одни запрос на сравнение $(c_j^i, 0^1)$ определяем знак числа $f_i(c_j)$. Если $f_i(c_j) > 0$, то определяем отрезок $[c, d] = [0, M]$, если же $f_i(a) < 0$, то устанавливаем $[c, d] = [-M, 0]$. Теперь согласно лемме 2 мы за $]\log_2 \frac{M}{\varepsilon}[$ запросов на сравнение вычисляем характеристику $V_{i,c_j}^{\varepsilon,c,d}$, то есть узнаем значение функции $f_i(x)$ в точке $x = c_j$ с точностью до ε.

Тем самым всего нам потребуется $(m-1)(n+1)(]\log_2 \frac{M}{\varepsilon}[+1) + 1$ запросов на сравнение.

Согласно лемме 3 для каждого полинома $f_i(x)$, $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, наша погрешность не превышает $M_{a,b}^{C,\varepsilon}$. Следовательно суммарная погрешность восстановленной функции не превышает $(m-1)M_{a,b}^{C,\varepsilon}$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4. *Если $f(x) = a_n x^n$, $a_n \in D_M \backslash \{0\}$, $g(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x$, $a_i \in D_M, i = 1, \ldots, n-1$, то для любого вещественного числа x такого, что $|x| \geqslant 2Mn$, выполнено $|f(x)| > 2|g(x)|$.*

Доказательство. Очевидно, что $|g(x)| \leqslant M(|x^{n-1}| + \ldots + |x^2| + |x|)$.

Пусть $|x| \geqslant 2Mn$, тогда $|a_n||x| \geqslant 2Mn$. Следовательно

$$|f(x)| = |a_n||x|^n \geqslant 2Mn|x|^{n-1} > 2M(|x|^{n-1} + \ldots + |x|) \geqslant 2|g(x)|.$$

Пусть $f(x) \in P_{D_M}$. Обозначим за $hst(f)$ старший ненулевой коэффициент функции $f(x)$.

Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \in \Psi_{D_M}^{n,m}$. Введем характеристику $Sign_i(\psi) = \mathtt{sign}(hst(f_i))$. Эта характеристика указывает на знак старшего ненулевого коэффициента полинома, зависящего от переменной x_i.

Лемма 5. *Имеет место равенство* $\varphi(\Psi^{n,m}_{D_M}, Sign_i) = 1$.

Доказательство. Напомним, что a^i — это вектор соответствующей длины, такой, что на i-м месте стоит число a, а остальные компоненты равны нулю.

Пусть $\psi \in \Phi^{n,m}_{D_M}$ функция зависящая от m переменных. Тогда согласно лемме 4, подавая запрос вида $((2nM)^i, 0)$, можно узнать знак старшего ненулевого коэффициента функции зависящей от переменной x_i.

Лемма 6. *Если* $f(x), g(x) \in P^n_{D_M}$, $f(x) = a_p x^p + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x$, $g(x) = a'_k x^k + \ldots + a'_2 x^2 + a'_1 x$, $p, k \leqslant n$, $a_p \neq 0$, $a'_k \neq 0$, $s_f = \mathtt{sign}(a_p)$, $s_g = \mathtt{sign}(a'_k)$, *то* $\mathtt{sign}(s_f f(2Mn) - s_g g(2Mn)) > 0$, *тогда и только тогда, когда выполняется одно из нижеперечисленных условий: либо* $p > k$; *либо* $p = k$ *и существует такой номер* $t \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, *что* $s_f a_p = s_g a'_p, s_f a_{p-1} = s_g a'_{p-1}, \ldots, s_f a_{p-t+1} = s_g a'_{p-t+1}$, *но* $s_f a_{p-t} > s_g a'_{p-t}$.

Доказательство. Докажем от противного достаточность.

Пусть $\mathtt{sign}(s_f f(2Mn) - s_g g(2Mn)) > 0$, но следствие не выполняется, то есть либо $p < k$, либо $p = k$ и для любого номера $t \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ выполняется $s_f a_{p-t} \leqslant s_g a'_{p-t}$.

Рассмотрим по отдельности оба случая.

Пусть верно, что $p < k$. Тогда разность $s_f f(x) - s_g g(x)$ можно представить в виде $-s_g a'_k x^k + r(x)$, где $r(x) \in P^{k-1}_{D_{2M}}$. Но согласно лемме 4 в точке $x = 2Mn$ имеет место неравенство $|-s_g a'_k x^k| > |r(x)|$. Это значит, что $\mathtt{sign}(s_f f(2Mn) - s_g g(2Mn)) < 0$. Противоречие.

Пусть теперь верно, что $p = k$ и для любого номера $t \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ выполняется $s_f a_{p-t} \leqslant s_g a'_{p-t}$. Но тогда $s_f f(x) \leqslant s_g g(x)$ и $sign(s_f f(x) - s_g g(x)) \leqslant 0$. Пришли к противоречию.

Докажем необходимость. Рассмотрим каждый из случаев.

Пусть $p > k$, тогда разность можно представить в виде $s_f f(x) - s_g g(x) = s_f a_p x^p + g(x)$, где $g(x) \in P^{p-1}_{D_{2M}}$. Согласно лемме 4 для $x = 2Mn$ выполняется неравенство $|s_f a_p x^p| > |g(x)|$. Следовательно, поскольку $s_f a_p x^p > 0$ в точке $x = 2Mn$, то и $s_f f(x) - s_g g(x) > 0$.

Пусть $p = k$ и существует такой номер $t \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, что $s_f a_p = s_g a'_p, s_f a_{p-1} = s_g a'_{p-1}, \ldots, s_f a_{p-t+1} = s_g a'_{p-t+1}$, но $s_f a_{p-t} > s_g a'_{p-t}$. Тогда разность можно представить в виде $s_f f(x) -$

$s_g g(x) = (s_f a_{p-t} - s_g a'_{k-t})x^{p-t} + g(x)$, где $g(x) \in P^{p-t-1}_{D_{2M}}$. Аналогично, согласно лемме 4 для $x = 2Mn$ выполняется неравенство $|(s_f a_{p-t} - s_g a'_{k-t})x^{p-t}| > |g(x)|$. Следовательно, поскольку $(s_f a_{p-t} - s_g a'_{k-t})x^{p-t} > 0$ в точке $x = 2Mn$, то и $s_f f(x) - s_g g(x) > 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.

Имеем $\psi(x_1, \ldots, x_m) = f_1(x_1) + \ldots + f_m(x_m)$, где $f_i(x) \in P^n_{D_M}$, $i = 1, \ldots, m$.

Из леммы 5 вытекает, что за m запросов на сравнение вида $((2Mn)^i, 0)$ можно узнать знаки всех старших ненулевых коэффициентов функций $f_i(x), i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим произвольные функции f_i и f_j, $i \neq j$. Пусть им соответствуют знаки s_i и s_j. Хотим понять у какой из этих функций больше старшая степень, а при их равенстве у какой из функций больше по модулю коэффициент при старшей степени. Если знаки s_i и s_j одинаковые, то подадим запрос на сравнение $((2Mn)^i, (2Mn)^j)$, а если разные, то — запрос $(0, (2Mn)^j + (2Mn)^i)$. В результате мы узнаем знак разности $s_f f(2Mn) - s_g g(2Mn)$, и по этому знаку согласно лемме 6 мы получим ответ на интересующий нас вопрос.

Понятно, что за $m - 1$ такого рода запросов мы определим какая из функций имеет максимальную старшую степень или максимальный по модулю коэффициент при старшей степени при одинаковых старших степенях у нескольких функций.

Теорема 2 доказана.

5. Оценка погрешности

Как видно из утверждения теоремы 1, для оценки погрешности расшифровки заданной функции нужно оценить число $M^{C,\varepsilon}_{a,b} = \sup\limits_{E \in \mathcal{E}^n_\varepsilon} \sup\limits_{x \in [a,b]} |M^{C,E}(x)| = \sup\limits_{E \in \mathcal{E}^n_\varepsilon} \sup\limits_{x \in [a,b]} |\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - c_i)\omega'(c_i)} \varepsilon_i|$. В общем случае это довольно трудная задача, однако, при при малых значениях n и некоторых ограничениях на множество C можно получить достаточно хорошие оценки.

Здесь мы рассмотрим случаи, когда $|C| \in \{3, 4, 5\}$, более того расстояния между любыми двумя подряд идущими элементами равны и отличны от нуля, то есть $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, $n \in \{3, 4, 5\}$,

$c_0 < c_1 < \ldots < c_n$ и для каждого номера $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ верно $c_{i+1} - c_i = c_1 - c_0$.

Лемма 7. *Если $\varepsilon > 0$, $f(x)$ — квадратичная функция такая, что $f(0) = 0$, $f(-1) = \varepsilon_{-1}$, $f(1) = \varepsilon_1$, причем для любого $i \in \{-1, 1\}$ выполнено $|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon$, то для любого $x \in [-1, 1]$ верно, что $|f(x)| \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\omega(x) = (x+1)x(x-1) = x^3 - x$. Тогда $\omega'(x) = 3x^2 - 1$.

Применим интерполяционную формулу Лагранжа

$$L_2(x) = \frac{\omega(x) \cdot \varepsilon_{-1}}{(x-(-1))\omega'(-1)} + \frac{\omega(x) \cdot 0}{(x-0)\omega'(0)} + \frac{\omega(x) \cdot \varepsilon_1}{(x-1)\omega'(1)} = \\ = \frac{\omega(x) \cdot \varepsilon_{-1}}{(x+1)\omega'(-1)} + \frac{\omega(x) \cdot \varepsilon_1}{(x-1)\omega'(1)}.$$

Понятно, что $f(x) = L_2(x)$, поскольку $f(x)$ — полином степени 2, а значит совпадает со своей интерполянтой $L_2(x)$ согласно [2].

Следовательно $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}\varepsilon_{-1} + \frac{(x+1)x}{2}\varepsilon_1$. Оценим эту функцию по модулю на отрезке $[-1; 1]$: $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}(|x(x-1)||\varepsilon_{-1}| + |(x+1)x||\varepsilon_1|) \leqslant \frac{1}{2}(|x(x-1)| + |(x+1)x|)\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} g(x)$.

Рассмотрим функцию $g(x)$ на отрезке $[-1, 0]$: $g(x) = \frac{1}{2}(x(x-1) - (x+1)x)\varepsilon = -x\varepsilon$, то есть $g(x) \leqslant \varepsilon$ при $x \in [-1, 0]$.

Рассмотрим функцию $g(x)$ на отрезке $[0, 1]$: $g(x) = \frac{1}{2}(-x(x-1) + (x+1)x)\varepsilon = x\varepsilon$, то есть $g(x) \leqslant \varepsilon$ при $x \in [0, 1]$.

Следовательно на отрезке $[-1, 1]$ верно, что $|f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Обозначим $M_{a,b}^{n,\varepsilon} = \inf_{C \in \mathcal{C}^n} M_{a,b}^{C,\varepsilon}$.

Утверждение 1. *Если $\varepsilon, a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $a < b$, то верно, что $M_{a,b}^{2,\varepsilon} \leqslant 3\varepsilon$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $C = \{c_0, c_1, c_2\}$, где $c_0 = a$, $c_1 = \frac{a+b}{2}$, $c_2 = b$. Рассмотрим произвольное множество $E = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\} \in \mathcal{E}_\varepsilon^2$, то есть $|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon$, $i = 0, 1, 2$. Тогда $M^{C,E}(x) = L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\omega(x)}{(x-c_i)\omega'(c_i)}\varepsilon_i$ есть квадратичная функция такая, что $L_2(a) = \varepsilon_0$, $L_2(\frac{a+b}{2}) = \varepsilon_1$, $L_2(b) = \varepsilon_2$.

Рассмотрим функцию $f(x) = L_2(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}) - \varepsilon_1$, которая получена из $L_2(x)$ параллельным переносом, переводящим точку $(\frac{a+b}{2}, \varepsilon_1)$

в точку $(0,0)$, и растяжением или сжатием вдоль оси абсцисс. Понятно, что $f(-1) = L_2(\frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}) - \varepsilon_1 = L_2(a) - \varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1$, $f(0) = L_2(\frac{a+b}{2}) - \varepsilon_1 = 0$, $f(1) = L_2(\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}) - \varepsilon_1 = L_2(b) - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$.

Поскольку $|\varepsilon_0 - \varepsilon_1| \leqslant 2\varepsilon$ и $|\varepsilon_2 - \varepsilon_1| \leqslant 2\varepsilon$, то согласно лемме 7 справедливо $|f(x)| \leqslant 2\varepsilon$ для любого $x \in [-1,1]$. Отсюда следует, что $|L_2(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2})| = |f(x) - \varepsilon_1| \leqslant 3\varepsilon$ при $x \in [-1,1]$ и $|L_2(x)| \leqslant 3\varepsilon$ при $x \in [a,b]$. Следовательно, $\sup_{x\in[a,b]} |M^{C,E}(x)| \leqslant 3\varepsilon$, и в силу произвольности множества $E = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ получаем $M_{a,b}^{2,\varepsilon} \leqslant M_{a,b}^{C,\varepsilon} = \sup_{E\in\mathcal{E}_\varepsilon^n} \sup_{x\in[a,b]} |M^{C,E}(x)| \leqslant 3\varepsilon$.

Лемма 8. *Если $\varepsilon > 0$, $f(x)$ — кубический полином такой, что $f(0) = 0$, $f(-1) = \varepsilon_{-1}$, $f(1) = \varepsilon_1$, $f(2) = \varepsilon_2$ причем для любого $i \in \{-1,1,2\}$ выполнено $|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon$, то для любого $x \in [-1,2]$ верно, что $|f(x)| \leqslant \frac{1}{27}(17 + 7\sqrt{7})\varepsilon < 1.32\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\omega(x) = (x+1)x(x-1)(x-2)$. Тогда $\omega'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2$.

Применим интерполяционную формулу Лагранжа

$$L_3(x) = \frac{\omega(x)}{(x-(-1))\omega'(-1)}\varepsilon_{-1} + \frac{\omega(x)}{(x-0)\omega'(0)}0 + \frac{\omega(x)}{(x-1)\omega'(1)}\varepsilon_1 + \\ + \frac{\omega(x)}{(x-2)\omega'(2)}\varepsilon_2 = \frac{\omega(x)}{(x+1)\omega'(-1)}\varepsilon_{-1} + \frac{\omega(x)}{(x-1)\omega'(1)}\varepsilon_1 + \frac{\omega(x)}{(x-2)\omega'(2)}\varepsilon_2.$$

Понятно, что $f(x) = L_3(x)$, поскольку $f(x)$ — полином степени 3, а значит совпадает со своей интерполянтой $L_3(x)$ согласно [2].

Следовательно $f(x) = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\varepsilon_{-1} - \frac{(x+1)x(x-2)}{2}\varepsilon_1 + \frac{(x+1)x(x-1)}{6}\varepsilon_2$. Оценим эту функцию по модулю на отрезке $[-1,2]$:

$$|f(x)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{6}(|x(x-1)(x-2)||\varepsilon_{-1}| + 3|(x+1)x(x-2)||\varepsilon_1| + |(x+1)x(x-1)||\varepsilon_2|) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{6}(|x(x-1)(x-2)| + 3|(x+1)x(x-2)| + |(x+1)x(x-1)|)\varepsilon \overset{\text{def}}{=} g(x)\varepsilon.$$

Рассмотрим функцию $g(x)$ на отрезке $[-1,0]$.

$$g(x) = \frac{1}{6}(-x(x-1)(x-2) + 3(x+1)x(x-2) + (x+1)x(x-1)) = \\ = \frac{1}{2}x(x^2-3) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}h(x).$$

Найдем значения функции $h(x)$ в точках экстремума и на концах отрезка $[-1,0]$. Поскольку $h'(x) = 3(x^2-1)$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ — точки экстремума функции $h(x)$. Однако, x_1 лежит вне отрезка $[-1,0]$. Так как $h(-1) = 2$, то $g(-1) = 1$. Поскольку $h(0) = 0$, то $g(0) = 0$. Следовательно на отрезке $[-1,0]$ выполнено неравенство $g(x) \leqslant 1$.

Далее рассмотрим функцию $g(x)$ на отрезке $[0,1]$.

$$g(x) = \frac{1}{6}(x(x-1)(x-2) - 3(x+1)x(x-2) - (x+1)x(x-1)) = \\ = -\frac{1}{2}x(x^2-3) = -\frac{1}{2}h(x).$$

Из точек экстремума функции $h(x)$ только точка $x_1 = 1$ лежит на отрезке $[0,1]$. Так как $h(1) = -2$, то $g(1) = 1$. Следовательно на отрезке $[0,1]$ выполнено неравенство $g(x) \leqslant 1$.

Далее рассмотрим функцию $g(x)$ на отрезке $[1,2]$.

$$g(x) = \frac{1}{6}(-x(x-1)(x-2) - 3(x+1)x(x-2) + (x+1)x(x-1)) = \\ = -\frac{1}{2}x(x^2-2x-1) \overset{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{2}q(x).$$

Найдем значения функции $q(x)$ в точках экстремума и на концах отрезка $[1,2]$. Поскольку $q'(x) = 3x^2 - 4x - 1$, то $x_1 = \frac{2-\sqrt{7}}{2}$, $x_2 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ — точки экстремума функции $q(x)$. Однако, x_1 лежит вне отрезка $[1,2]$. Так как $q(1) = -2$ и $q(2) = -2$, то $g(1) = g(2) = 1$. Поскольку $q(\frac{2+\sqrt{7}}{3}) = -\frac{2}{27}(17+7\sqrt{7})$, то $g(\frac{2+\sqrt{7}}{3}) = \frac{1}{27}(17+7\sqrt{7})$. Следовательно на отрезке $[1,2]$ выполнено неравенство $g(x) \leqslant \frac{1}{27}(17+7\sqrt{7})$.

Тогда на отрезке $[-1,2]$ верно, что $|f(x)| \leqslant \frac{1}{27}(17+7\sqrt{7})\varepsilon < 1.32\varepsilon$.

Утверждение 2. *Если $\varepsilon, a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $a < b$, то верно, что $M^{3,\varepsilon}_{a,b} < 3.64\varepsilon$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $C = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$, где $c_0 = a$, $c_1 = a + \frac{b-a}{3}$, $c_2 = a + \frac{2}{3}(b-a)$, $c_3 = b$. Рассмотрим произвольное множество $E = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \in \mathcal{E}^3_\varepsilon$, то есть $|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon$, $i = 0,1,2,3$. Тогда $M^{C,E}(x) = L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\omega(x)}{(x-c_i)\omega'(c_i)}\varepsilon_i$ есть кубический полином такой, что $L_3(a) = \varepsilon_0$, $L_3(a+\frac{b-a}{3}) = \varepsilon_1$, $L_3(a+\frac{2}{3}(b-a)) = \varepsilon_2$, $L_3(b) = \varepsilon_3$.

Рассмотрим функцию $f(x) = L_3(\frac{b-a}{3}x + \frac{2a+b}{3}) - \varepsilon_1$, которая получена из $L_3(x)$ параллельным переносом, переводящим точку $(\frac{2a+b}{3}, \varepsilon_1)$

в точку $(0,0)$, и растяжением или сжатием вдоль оси абсцисс. Понятно, что $f(-1) = L_3(\frac{a-b}{3} + \frac{2a+b}{3}) - \varepsilon_1 = L_3(a) - \varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1$, $f(0) = L_3(\frac{2a+b}{3}) - \varepsilon_1 = 0$, $f(1) = L_3(\frac{b-a}{3} + \frac{2a+b}{3}) - \varepsilon_1 = L_3(\frac{a+2b}{3}) - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $f(2) = L_3(\frac{2(b-a)}{3} + \frac{2a+b}{3}) - \varepsilon_1 = L_3(b) - \varepsilon_1 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$.

Поскольку $|\varepsilon_0 - \varepsilon_1| \leqslant 2\varepsilon$, $|\varepsilon_2 - \varepsilon_1| \leqslant 2\varepsilon$ и $|\varepsilon_3 - \varepsilon_1| \leqslant 2\varepsilon$, то согласно лемме 8 справедливо $|f(x)| \leqslant \frac{2}{27}(17 + 7\sqrt{7})\varepsilon$ для любого $x \in [-1,2]$. Отсюда следует, что $|L_3(\frac{b-a}{3}x + \frac{2a+b}{3})| = |f(x) - \varepsilon_1| \leqslant (\frac{2}{27}(17+7\sqrt{7})+1)\varepsilon$ при $x \in [-1,2]$ и $|L_3(x)| \leqslant (\frac{2}{27}(17 + 7\sqrt{7}) + 1)\varepsilon$ при $x \in [a,b]$.

Следовательно $M^{3,\varepsilon}_{a,b} \leqslant M^{C,\varepsilon}_{a,b} \leqslant (\frac{2}{27}(17 + 7\sqrt{7}) + 1)\varepsilon < 3.64\varepsilon$.

Лемма 9. *Если* $\varepsilon > 0$, $f(x)$ *— полином степени* 4 *такой, что* $f(0) = 0$, $f(-2) = \varepsilon_{-2}$ $f(-1) = \varepsilon_{-1}$, $f(1) = \varepsilon_1$, $f(2) = \varepsilon_2$ *причем для любого* $i \in \{-2,-1,1,2\}$ *выполнено* $|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon$, *то для любого* $x \in [-2,2]$ *верно, что* $|f(x)| \leqslant 2\frac{19}{81}\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\omega(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$. Тогда $\omega'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4$.

Применим интерполяционную формулу Лагранжа

$$L_4(x) = \frac{\varepsilon_{-2}\omega(x)}{(x+2)\omega'(-2)} + \frac{\varepsilon_{-1}\omega(x)}{(x+1)\omega'(-1)} + \frac{\omega(x)\cdot 0}{(x-0)\omega'(0)} + \\ + \frac{\varepsilon_1\omega(x)}{(x-1)\omega'(1)} + \frac{\varepsilon_2\omega(x)}{(x-2)\omega'(2)} = \\ = \frac{\varepsilon_{-2}\omega(x)}{(x-(-2))\omega'(-2)} + \frac{\varepsilon_{-1}\omega(x)}{(x+1)\omega'(-1)} + \frac{\varepsilon_1\omega(x)}{(x-1)\omega'(1)} + \frac{\varepsilon_2\omega(x)}{(x-2)\omega'(2)}.$$

Понятно, что $f(x) = L_4(x)$, поскольку $f(x)$ — полином степени 4, а значит совпадает со своей интерполянтой $L_4(x)$ согласно [2].

Следовательно $f(x) = \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{24}\varepsilon_{-2} - \frac{(x+2)x(x-1)(x-2)}{6}\varepsilon_{-1} - \frac{(x+2)(x+1)x(x-2)}{6}\varepsilon_1 + \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{24}\varepsilon_2$. Оценим эту функцию по модулю на отрезке $[-2,2]$:

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{24}(|(x+1)x(x-1)(x-2)||\varepsilon_{-2}| + 4|(x+2)x(x-1)(x-2)||\varepsilon_{-1}| + \\ + 4|(x+2)(x+1)x(x-2)||\varepsilon_1| + |(x+2)(x+1)x(x-1)||\varepsilon_2|) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{24}(|(x+1)x(x-1)(x-2)| + 4|(x+2)x(x-1)(x-2)| + \\ + 4|(x+2)(x+1)x(x-2)| + |(x+2)(x+1)x(x-1)|)\varepsilon \overset{\text{def}}{=} g(x)\varepsilon.$$

Поскольку

$$g(-x) =$$
$$= \frac{1}{24}(|(-x+1)(-x)(-x-1)(-x-2)|+4|(-x+2)(-x)(-x-1)(-x-2)|+$$
$$+4|(-x+2)(-x+1)(-x)(-x-2)|+|(-x+2)(-x+1)(-x)(-x-1)|) =$$
$$= \frac{1}{24}(|(x+2)(x+1)x(x-1)| + 4|(x+2)(x+1)x(x-2)|+$$
$$+ 4|(x+2)x(x-1)(x-2)| + |(x+1)x(x-1)(x-2)|) = g(x),$$

то $g(x)$ — четная функция, поэтому достаточно исследовать ее поведение на отрезке $[-2, 0]$.

Рассмотрим функцию $g(x)$ на отрезке $[-2, -1]$.

$$g(x) = \frac{1}{24}((x+1)x(x-1)(x-2) - 4(x+2)x(x-1)(x-2)-$$
$$- 4(x+2)(x+1)x(x-2) - (x+2)(x+1)x(x-1)) =$$
$$= \frac{1}{6}x(-2x^3 - x^2 + 8x + 1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{6}xh(x) \leqslant \frac{1}{6}|x||h(x)| \leqslant \frac{1}{3}|h(x)|.$$

Найдем значения функции $h(x)$ в точках экстремума и на концах отрезка $[-2, -1]$. Поскольку $h'(x) = -6x^2 - 2x + 8$, то $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 1$ — точки экстремума функции $h(x)$. Однако, x_2 лежит вне отрезка $[-2, -1]$. Так как $h(-2) = -3$, $h(-\frac{4}{3}) = 6\frac{19}{27}$ и $h(-1) = -6$, то $g(-2) \leqslant 1$, $g(-\frac{4}{3}) \leqslant 2\frac{19}{81}$ и $g(-1) \leqslant 2$.

Следовательно на отрезке $[-2, -1]$ выполнено неравенство $g(x) \leqslant 2\frac{19}{81}$.

Рассмотрим функцию $g(x)$ на отрезке $[-1; 0]$.

$$g(x) = \frac{1}{24}(-(x+1)x(x-1)(x-2) - 4(x+2)x(x-1)(x-2)+$$
$$+ 4(x+2)(x+1)x(x-2) + (x+2)(x+1)x(x-1)) =$$
$$= \frac{1}{2}x(x^2 - 3) = \frac{1}{2}q(x).$$

Найдем значения функции $q(x)$ в точках экстремума и на концах отрезка $[-1, 0]$. Поскольку $q'(x) = 3(x^2 - 1)$, то $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ — точки экстремума функции $q(x)$. Однако, x_2 лежит вне отрезка $[-1, 0]$. Так как $q(-1) = 2$ и $q(0) = 0$, то $g(-1) = 1$ и $g(0) = 0$.

Следовательно на отрезке $[-1, 0]$ функция $g(x) \leqslant 1$.

Тогда на отрезке $[-2, 2]$ верно, что $|f(x)| \leqslant 2\frac{19}{81}\varepsilon$.

Утверждение 3. *Если* $\varepsilon, a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $a < b$, *то верно, что* $M^{4,\varepsilon}_{a,b} \leqslant 5\frac{38}{81}\varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим множество $C = \{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4\}$, где $c_0 = a$, $c_1 = a + \frac{b-a}{4}$, $c_2 = a + \frac{b-a}{2}$, $c_3 = \frac{3b+a}{4}$, $c_4 = b$. Рассмотрим произвольное множество $E = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\} \in \mathcal{E}^4_\varepsilon$, то есть $|\varepsilon_i| \leqslant \varepsilon$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Тогда $M^{C,E}(x) = L_4(x) = \sum_{i=0}^4 \frac{\omega(x)}{(x-c_i)\omega'(c_i)}\varepsilon_i$ есть кубический полином такой, что $L_4(a) = \varepsilon_0$, $L_4(\frac{3a+b}{4}) = \varepsilon_1$, $L_4(\frac{a+b}{2}) = \varepsilon_2$, $L_4(\frac{a+3b}{4}) = \varepsilon_3$, $L_4(b) = \varepsilon_4$.

Рассмотрим функцию $f(x) = L_4(\frac{b-a}{4}x + \frac{a+b}{2}) - \varepsilon_2$, которая получена из $L_4(x)$ параллельным переносом, переводящим точку $(\frac{a+b}{2}, \varepsilon_2)$ в точку $(0, 0)$, и растяжением или сжатием вдоль оси абсцисс. Понятно, что $f(-2) = L_4\left(\frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon_2 = L_4(a) - \varepsilon_2 = \varepsilon_0 - \varepsilon_2$, $f(-1) = L_4\left(\frac{a-b}{4} + \frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon_2 = L_4\left(\frac{3a+b}{4}\right) - \varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $f(0) = L_4\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon_2 = 0$, $f(1) = L_4\left(\frac{b-a}{4} + \frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon_2 = L_4\left(\frac{a+3b}{4}\right) - \varepsilon_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $f(2) = L_4\left(\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}\right) - \varepsilon_2 = L_4(b) - \varepsilon_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$.

Поскольку $|\varepsilon_0 - \varepsilon_2| \leqslant 2\varepsilon$, $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \leqslant 2\varepsilon$, $|\varepsilon_3 - \varepsilon_2| \leqslant 2\varepsilon$ и $|\varepsilon_4 - \varepsilon_2| \leqslant 2\varepsilon$, то согласно лемме 9 справедливо $|f(x)| \leqslant 4\frac{38}{81}\varepsilon$ для любого $x \in [-2, 2]$. Отсюда следует, что $|L_4(\frac{b-a}{4}x + \frac{a+b}{2})| = |f(x) - \varepsilon_2| \leqslant 5\frac{38}{81}\varepsilon$ при $x \in [-2, 2]$ и $|L_4(x)| \leqslant 5\frac{38}{81}\varepsilon$ при $x \in [a, b]$.

Следовательно $M^{3,\varepsilon}_{a,b} \leqslant M^{C,\varepsilon}_{a,b} \leqslant 5\frac{38}{81}\varepsilon$.

Список литературы

[1] Гасанов Э. Э. Расшифровка линейных функций ранжирования // Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, 18–23 июня 2012 г.). — М.: Изд-во мех-мат фак-та МГУ, 2012. — С. 332–334.

[2] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука, 1989.