Автоматы с суперпозициями, пример нерасширяемости до предполного класса

Д. Н. Бабин

Приводится пример замкнутого класса автоматов с операцией сурерпозиции, нерасширяющегося до предполного класса.

Ключевые слова: Автомат, суперпозиция, предполный класс.

Известно, что решение задач полноты и выразимости для систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности [1]. Так в работе [2] установлена континуальность мно- жества предполных классов для систем автоматных функций, а в работе Кратко [3] установлена алгоритмическая неразрешимость задачи полноты относительно суперпозиции с обратной связью для конечных систем автоматных функций. Несмотря на то, что имеет место неполнота любой конечной системы автоматов относительно суперпозиции, система, состоящая из автоматов с двумя входами образуют полную систему[4]. Для автоматов с операцией суперпозиции оставался открытым вопрос о расширяемости замкнутых классов до предполных. Автор показал, что это не так.

Несмотря на отрицательный характер результата этой статьи, в прикладной теории автоматов удаётся получать некоторые положительные результаты [7-10]. Общий обзор результатов в теории автоматов дан в работе [11].

Обозначим через $E_2 = \{0, 1\}$, множество булевых функций вида $g : E_2^n \to E_2$ обозначим через $\mathbf{P_2}$. Обозначим через E_2^∞-

множество всех сверхслов из нулей и единиц $a(1)a(2)...$, где $a(j) \in E_2,\ j = 1, 2, ...$.

Функция вида

$$f : (E_2^\infty)^n \to (E_2^\infty)^m$$

- называется *автоматной функцией (a-функцией)*, она задается рекуррентно соотношениями (1)

$$\begin{cases} q_1(1) = q0_1, \\ ... \\ q_s(1) = q0_s \\ q_1(t+1) = \phi_1(q_1(t), ..., q_s(t), a_1, ..., a_n), \\ ... \\ q_s(t+1) = \phi_s(q_1(t), ..., q_s(t), a_1, ..., a_n) \\ b_1(t) = \psi_1(q_1(t), ..., q_s(t), a_1, ..., a_n) \\ ... \\ b_m(t) = \psi_m(q_1(t), ..., q_s(t), a_1, ..., a_n) \end{cases} \quad (1)$$

Вектор $q = (q_1, ..., q_s)$ задает *состояние* a-функции f, $q0$ её *начальное состояние*, буквы

$$a = (a_1, a_2..., a_n) \text{ и } b = (b_1, ..., b_m)$$

называются *входной и выходной буквами*, а сверхслова

$$a(1)a(2)... \text{ и } b(1)b(2)... \text{ -}$$

входными и выходными сверхсловами, соответственно.

Вектор-функции ϕ и ψ называются функциями *переходов и выходной* функцией, соответственно, а шестерка

$$(E_2^n, E_2^s, E_2^m, \phi, \psi, q_0)$$

- *автоматом*, порождающим функцию f.
Будем считать, что все состояния автомата достижимы из начального. Мы будем использовать для автомата обозначение

$$(A, Q, B, \phi, \psi, q_0),$$

при этом предполагая что $A \subseteq E_2^n, Q \subseteq E_2^s, B \subseteq E_2^m$.

Класс всех a-функций обозначим через $\mathbf{P}$. В этом классе обычным образом введем операции суперпозиции автоматных функций. Для суперпозиции будем использовать модификации операций из [5].

$$\left\{ \begin{array}{l} (\eta f)(x_1, x_2, .., x_n) = f(x_2, x_3, ..., x_n, x_1), \\ (\varepsilon f)(x_1, x_2, .., x_n) = f(x_2, x_1, x_3, ..., x_n) \\ (\varpi f)(x_1, x_2, .., x_n) = f(x_1, x_3, .., x_n) \\ (\delta f)(x_1, x_2, .., x_n) = f(x_1, x_2, .., x_{n+1}) \\ (f * g)(x_1, x_2, .., x_{m+n-1}) = f(g(x_1, ..., x_m), x_{m+1}, ..., x_{m+n-1}) \end{array} \right.$$

Для автоматов, задающих автоматные функции, при операциях суперпозиции естественным образом выбирается множество состяний, достижимых из начального. Автоматы, имеющие одинаковые автоматные функции, называются эквивалентными.

Пусть $R \subseteq \mathbf{P}$, обозначим через $[R]$ - множество a-функций, получающихся из R с помощью операций суперпозиции. Класс автоматных функций R называется замкнутым, если $R = [R]$. Класс автоматных функций R называется предполным, если $R \subset \mathbf{P}$ и для любой автоматной функции $f \notin R$ выполнено $[\{f\} \bigcup R] = \mathbf{P}$.

Автоматную функцию G_0, задаваемую уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} q(1) = 0, \\ q(t+1) = a(t), \\ b(t) = q(t), \end{array} \right.$$

назовём автоматной функцией "задержки".

Автоматную функцию T_0, задаваемую уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} (q_1(1), q_2(1)) = (0, 0) \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (a_1(t), a_2(t)), a_1(t)a_2(t) = 00 || a_1(t)a_2(t) = 11 \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (q_1(t), q_2(t)), a_1(t)a_2(t) = 01 \\ (b_1(t), b_2(t)) = (q_1(t), q_2(t)), \end{array} \right.$$

назовём автоматной функцией "триггер".

Константной автоматной функцией назовем автоматную функцию, выдающую одно и тоже периодическое выходное сверхслово на всех входных сверхсловах. Класс константных автоматных функций обозначим через $\mathbf{K}$.

Имеет место

Теорема *Не существует предполного класса автоматных функций содержащего замкнутый класс* $[\mathbf{K} \cup \mathbf{P_2} \cup \{G_0, T_0\}]$.

Автомат называется *автоматом Медведева*, если

$$B = Q,\ \psi(a, q) = q.$$

Пусть C *простая некоммутативная группа*, а $\tilde{C}$ ей изоморфная группа перестановок на множестве Q, автомат Медведева вида

$$(\tilde{C}, Q, \tilde{C}, \tilde{\phi}, \psi, e)$$

назовём *простым* автоматом, здесь $\tilde{\phi}(q, c) = \tilde{c}(q)$.

Множество простых автоматов для всех некоммутативных простых групп обозначим через $\mathbf{PRIME}$. Для одной простой группы возможно существование нескольких неизоморфных простых автоматов для разных представлений группы C перестановками, но все они выразимы друг через друга суперпозициями с использованием булевых функций. Более того, если $C_1 \subseteq C$ подгруппа группы C, то простой автомат с группой C_1 выразим суперпозициями с использованием булевых функций через простой автомат с группой C.

Имеет место

Лемма. *Выразимость простого автомата с группой C через систему автоматов*

$$M \bigcup \mathbf{K} \bigcup \mathbf{P_2} \bigcup \{T_0, G_0\}$$

равносильна выразимости простого автомата с группой C через систему автоматов

$$\{\mathbf{A}\} \bigcup \mathbf{K} \bigcup \mathbf{P_2} \bigcup \{T_0, G_0\}$$

для некоторого $\mathbf{A} \in M$.

Доказательство теоремы

Рассмотрим систему автоматов $\mathbf{PRIME}\bigcup\mathbf{K}\bigcup\mathbf{P_2}\bigcup\{T_0,G_0\}$. Это полная система [6]. Она останется полной, если в $\mathbf{PRIME}$ оставить только знакопеременные простые группы. В самом деле: всякая группа является подгруппой подходящей знакопеременной, в том числе и знакопеременная меньшего порядка. Без ограничения общности будем считать, что $\mathbf{PRIME}$ состоит только из автоматов со знакопеременными группами. Если существует предполный класс $\mathbf{M}$ содержащий множество $[\mathbf{K}\cup\mathbf{P_2}\cup\{G_0,T_0\}]$, то для $\mathbf{PRIME}\bigcap\mathbf{M}$ имеется две возможности:

выполнено $\mathbf{PRIME}\subset\mathbf{M}$;

число простых групп для автоматов из $\mathbf{PRIME}\bigcap\mathbf{M}$ конечно. В самом деле: если $\mathbf{PRIME}\bigcap\mathbf{M}$ бесконечно, то для всякого автомата с простой группой C в этом множестве найдётся автомат со знакопеременной группой, содержащей C в качестве подгуппы.

В первом случае $\mathbf{M}=\mathbf{P}$ полная система, и не является предполным классом. Во втором случае по лемме и [6] полугруппа добавляемого автомата должна иметь бесконечно много простых групп-делителей, что противоречиво. Поэтому $[\mathbf{M}\bigcup\{f\}]\neq\mathbf{P}$. •

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б. Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение втеорию автоматов, Наука, М., 1985.

[2] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных классовнекоторых функциональных систем, связанных с автоматами,ДАН СССР т.151,N3,1963, с.493-496.

[3] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов, ДАН СССР, 1964, т.155, N 1, с.35–37.

[4] Бабин Д. Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции, Дискретная матетматика, том 1, выпуск 4, 1989, стр. 423-431.

[5] Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразие Поста, Алгебра и логика, 1966, т.5, N2, с.5–24.

[6] Арбиб М. Алгебраическая теория автоматов языков и полугрупп, "Статистика М.,1975.

[7] Петюшко А. А. О контекстно-свободных биграммных языках, Интеллектуальные системы, Том 19, выпуск 2,2015 г.,стр.187-208

[8] Бабин Д. Н. Частотные регулярные языки, Интеллектуальные системы, Том 18, выпуск 1,2014 г.,стр. 205-210

[9] Иванов И. Е. О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином, Интеллектуальные системы, Том 19, выпуск 1,2015 г.,стр. 145-160

[10] Летуновский А. А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции, Интеллектуальные системы, Том 19, выпуск 1,2015 г.,стр. 161-170

[11] Кудрявцев В. Б.афедра математической теории интеллектуальных систем (МаТИС),Интеллектуальные системы, Том 18, выпуск 2,2014 г.,стр. 5-30

Superposition of automata. Set of automata which is not contained in precomplete set

D. N. Babin

An example of automata set, which is not contained in precomplete set.

Keywords: Automaton, superposition, precomplete set .