Неразрешимое суперинтуиционистское пропозициональное исчисление от трех переменных

Г. В. Боков

В данной работе построено неразрешимое суперинтуиционистское пропозициональное исчисление, аксиомы которого содержат только три переменные.

Ключевые слова:Суперинтуиционистское пропозициональное исчисление, неразрешимое исчисление, машина Минского.

Введение

Первое суперинтуиционистское пропозициональное исчисление было построено Шехтманом в 1978 [2]. Аксиомы этого исчисления содержали семь переменных. В 1994 году Чагров [1] получил суперинтуиционистское исчисление от четырех переменных. В [3, Раздел 16.9] он отмечает, что для случая двух и трех переменных этот вопрос остается открытым. В данной работе будет показано существование суперинтуиционистского пропозиционального исчисления, аксиомы которого зависят от трех переменных.

Основной результат

Под суперинтуиционистским пропозициональным исчислением понимается конечное расширение интуиционистского исчисления высказываний **Int**. Суперинтуиционистское исчисление, полученное из **Int** добавлением в качестве новой аксиомы формулы A будем обозначать через $\mathbf{Int} + A$.

Пусть

$$
\begin{aligned}
S_{-2}[x] &= \neg x, & S_{-1}[x] &= T_{-2}[x] \to x,\\
T_{-2}[x] &= \neg\neg x, & T_{-1}[x] &= S_{-1}[x] \to S_{-2}[x] \vee T_{-2}[x],\\
S_i[x] &= T_{i-1}[x] \to S_{i-1}[x] \vee T_{i-2}[x], & &\\
T_i[x] &= S_i[x] \to S_{i-1}[x] \vee T_{i-1}[x] \quad \text{для } i \geq 0. & &
\end{aligned}
$$

Определим вспомогательные формулы от переменных p_0, p_1 и p_2:

$$A_i^0 = S_{i+3}[p_0], \quad B_i^0 = T_{i+3}[p_0] \quad \text{для } i \geq -5;$$

$$A_i^j = S_{i+3}[p_j], \quad B_i^j = T_{i+3}[p_j] \quad \text{для } i \in \{-3,-4,-5\},\ j \in \{1,2\};$$

$$
\begin{aligned}
A_{-2}^j &= B_{-3}^j \to A_{-3}^j \vee B_{-4}^1, & A_{-1}^j &= B_{-2}^j \to A_{-2}^j \vee B_{-3}^1,\\
B_{-2}^j &= A_{-3}^j \to C_j \vee B_{-3}^1, & B_{-1}^j &= A_{-2}^j \to A_{-3}^j \vee B_{-2}^1 \quad \text{для } j \in \{1,2\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_i^1 &= C_2 \wedge B_{i-1}^1 \to C_1 \vee A_{i-1}^1 \vee B_{i-2}^1,\\
B_i^1 &= C_2 \wedge A_{i-1}^1 \to C_1 \vee A_{i-2}^1 \vee B_{i-1}^1 \quad \text{для } i \geq 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_i^1 &= C_2 \wedge B_{i-1}^1 \to C_1 \vee A_{i-1}^1 \vee B_{i-2}^1,\\
B_i^1 &= C_2 \wedge A_{i-1}^1 \to C_1 \vee A_{i-2}^1 \vee B_{i-1}^1 \quad \text{для } i \geq 0;
\end{aligned}
$$

где $C_1 = A_0^0$ и $C_2 = B_0^0$. Для $s, m, n \geq 0$ положим

$$
\begin{aligned}
E_{s,m,n} = A_{3s+2}^0 \wedge B_{3s+2}^0 \wedge A_{m+1}^1 \wedge B_{m+1}^1 \wedge A_{n+1}^2 \wedge B_{n+1}^2 \to\\
\to A_{3s+1}^0 \vee B_{3s+1}^0 \vee A_m^1 \vee B_m^1 \vee A_n^2 \vee B_n^2.
\end{aligned}
$$

Кроме того определим формулы $F_k = F_k[x,y,u,v]$ и $G_k = G_k[x,y,u,v]$:

$$
\begin{aligned}
&F_0 = x, && G_0 = y,\\
&F_1 = v \wedge y \to u \vee x, && G_1 = v \wedge x \to u \vee y,\\
&F_k = v \wedge G_{k-1} \to u \vee F_{k-1} \vee G_{k-2}, && G_k = v \wedge F_{k-1} \to u \vee G_{k-1} \vee F_{k-2},
\end{aligned}
$$

где $k \geq 0$. Положим

$$
\begin{aligned}
F_k^1 &= F_k[p_1, p_2, A_{-1}^0, B_{-1}^0], & G_k^1 &= G_k[p_1, p_2, A_{-1}^0, B_{-1}^0],\\
F_k^2 &= F_k[p_1, p_2, B_{-1}^0, A_{-1}^0], & G_k^2 &= G_k[p_1, p_2, B_{-1}^0, A_{-1}^0]
\end{aligned}
$$

для всех $k \geq 0$. Последнее семейство формул, необходимое для формулировки результата, определим следующим образом:

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{s,i,j} &= A^0_{3s+2} \wedge B^0_{3s+2} \wedge F^1_{i+1} \wedge G^1_{i+1} \wedge F^2_{j+1} \wedge G^2_{j+1} \to \\
&\quad \to A^0_{3s+1} \vee B^0_{3s+1} \vee F^1_i \vee G^1_i \vee F^2_j \vee G^2_j, \\
\hat{E}_{s,0,*} &= A^0_{3s+2} \wedge B^0_{3s+2} \wedge A^1_1 \wedge B^1_1 \to A^0_{3s+1} \vee B^0_{3s+1} \vee A^1_0 \vee B^1_0 \vee q, \\
\hat{E}_{s,*,0} &= A^0_{3s+2} \wedge B^0_{3s+2} \wedge A^2_1 \wedge B^2_1 \to A^0_{3s+1} \vee B^0_{3s+1} \vee p \vee A^2_0 \vee B^2_0, \\
\hat{E}_{s,0,0} &= E_{s,0,0},
\end{aligned}$$

где $s \geq 0$, $i, j \geq 1$.

Пусть $\mathcal{M}$ — машина Минского [5]. Определим формулу $Ax(I)$, задающую инструкцию I машины $\mathcal{M}$:

1) Если I — это инструкция вида $s \mapsto \langle t, 1, 0\rangle$, то
$$Ax(I) = \hat{E}_{t,2,1} \to \hat{E}_{s,1,1};$$

2) Если I — это инструкция вида $s \mapsto \langle t, 0, 1\rangle$, то
$$Ax(I) = \hat{E}_{t,1,2} \to \hat{E}_{s,1,1};$$

3) Если I — это инструкция вида $s \mapsto \langle t, -1, 0\rangle \,/\, \langle u, 0, 0\rangle$, то
$$Ax(I) = (\hat{E}_{t,1,1} \to \hat{E}_{s,2,1}) \wedge (\hat{E}_{u,0,*} \to \hat{E}_{s,0,*});$$

4) Если I — это инструкция вида $s \mapsto \langle t, 0, -1\rangle \,/\, \langle u, 0, 0\rangle$, то
$$Ax(I) = (\hat{E}_{t,1,1} \to \hat{E}_{s,1,2}) \wedge (\hat{E}_{u,*,0} \to \hat{E}_{s,*,0}),$$

Наконец, определим формулу $Ax(\mathcal{M})$, кодирующую поведение машины $\mathcal{M}$:
$$Ax(\mathcal{M}) = \bigwedge_{I \in \mathcal{M}} Ax(I).$$

Следующая лемма устанавливает соответствие между выводимостью конфигураций машины $\mathcal{M}$ и выводимостью формул в исчислении $\mathbf{Int} + Ax(\mathcal{M})$.

Лемма. $E_{t,k,l} \to E_{s,m,n} \in \boldsymbol{Int} + Ax(\mathcal{M}) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle s, m, n\rangle \overset{\mathcal{M}}{\Longrightarrow} \langle t, k, l\rangle.$

Поскольку существует машина $\mathcal{M}$ и стартовая конфигурация $\langle s, m, n\rangle$ с неразрешимой проблемой вывода конфигураций [3], то верна следующая теорема.

Теорема. *Исчисление $\boldsymbol{Int} + Ax(\mathcal{M})$ неразрешимо.*

Заключение

В данной работе было построено неразрешимое суперинтуиционистское пропозициональное исчисление от трех переменных. В работе [4] было показано, что интуиционистская формула

$$A = (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$$

не выводима из множества всех тавтологий от двух переменных. Тем самым, не существует неразрешимого суперинтуиционистского исчисление, аксиомы которого содержат менее трех переменных.

Список литературы

[1] *Чагров А. В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик. // Математические вопросы кибернетики, 1994, вып. 5, стр. 62–108.

[2] *Шехтман В. Б.* Неразрешимое суперинтуиционистское исчисление высказываний. // Доклады АН СССР, 1978, т. 240, №. 3, стр. 549–552.

[3] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. — Oxford, Clarendon Press, 1997, vol. 35 of Oxford logic guides, 605 pp.

[4] *Gladstone M. D.* On the number of variables in the axioms,. // Notre Dame Journal of Formal Logic, 1970, vol. 11, p. 1–15.

[5] *Minsky M. L.* Computation: Finite and Infinite Machines. — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967. xviii + 317 pp.

Undecidable three-variables superintuitionistic propositional calculus

G. V. Bokov

In this paper, we construct an undecidable superintuitionistic propositional calculus with axioms containing only three variables.

Keywords: Superintuitionistic propositional calculus, undecidable calculus, Minsky machine.