

О двух размерностях спектров тонких языков

П. С. Дергач

В статье рассматривается класс \mathbb{T} тонких языков - регулярных языков с не более чем линейной функцией роста. Для этих языков вводится понятие двух размерностей - dim и Dim . Приводится результат о том, какие значения принимаются этими величинами на \mathbb{T} . Кроме того, находится множество всех реализуемых пар $(dimP, DimP)$, где на $P \in \mathbb{T}$.

Ключевые слова: спектр, тонкие языки, размерность, функция роста.

Введение

В данной работе изучаются спектры класса тонких языков. О роли и значении этого класса в рамках общей теории алфавитного кодирования регулярных языков можно прочитать в статье [1]. Познакомиться с понятием регулярных языков можно в [2]. Понятие алфавитного кодирования, в свою очередь, есть в [3] и [4]. Множество интересных результатов по современной теории автоматов можно найти в [5-14]. Очевидно, что не всегда можно однозначно восстановить тонкий язык по его спектру. Тем не менее, с помощью спектральных свойств тонких языков удастся получить для них разумную классификацию. В работе [1] показано, что спектр любого тонкого языка представим в виде конечного объединения обобщенных арифметических прогрессий (в дальнейшем ОАП). Пусть S - один из таких спектров. Для него можно определить два понятия размерности. Первой размерностью такого спектра называется минимальное количество ОАП, объединение которых равно S . Второй размерностью называется минимальное количество непересекающихся ОАП, объединение которых равно S . Оказывается, что для произвольного натурального числа n можно

привести пример спектра, у которого и первая, и вторая размерность равна n . Более интересным является вопрос о том, какие значения пар этих размерностей в совокупности бывают у спектров тонких языков. Легко понять, что первая размерность не может превышать вторую, и если первая размерность равна 1, то и вторая должна быть равна 1. Оказывается, что никаких других ограничений на эти пары размерностей нет. Для каждой пары m, n натуральных чисел таких, что $m = n = 1$ или $2 \leq m \leq n$ удастся построить тонкий язык со спектром, у которого первая размерность равна m , а вторая равна n . Используемая при этом техника нетривиальна и позволяет ставить и решать целую серию теоретико-числовых задач по этой тематике.

Основные определения и результаты

Через \mathbb{N}^+ обозначаем множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть A - непустое конечное множество. В дальнейшем будем называть его *алфавитом*, а его элементы - *буквами*. *Словами* называем произвольные конечные последовательности букв алфавита A . Для удобства рассматриваем при этом также *пустое* слово, не имеющее ни одной буквы и обозначаемое λ . Все слова кроме пустого называем *непустыми*. Множество слов в алфавите A обозначаем через A^* . Для любого $k \in \mathbb{N}^+$ и любого слова $\alpha \in A^*$ через α^k обозначаем слово, полученное записыванием подряд слова α k раз. При $k = 0$ по умолчанию считаем $\alpha^k = \lambda$.

Для произвольного множества $P \subseteq A^*$ через $|P|$ обозначаем его мощность. Если множество P конечно, то пишем $|P| < \infty$. Через $Sub(P)$ обозначаем множество всех подмножеств множества P .

Пусть A - непустой конечный алфавит и $s \in \mathbb{N}$. Введем понятие s -тонкого множества в алфавите A . Регулярное множество P , $P \subseteq A^*$, называем s -тонким в алфавите A , если

1) существуют s слов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \in P$ таких, что $l(\beta_1) = l(\beta_2) = \dots = l(\beta_s)$ и для них не существуют $i, j \in \mathbb{N}$ такие, что $1 \leq i < j \leq s$ и $\beta_i = \beta_j$;

2) для любых $s + 1$ слов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1} \in P$ таких, что $l(\alpha_1) = l(\alpha_2) = \dots = l(\alpha_{s+1})$ существуют $i, j \in \mathbb{N}$ такие, что $1 \leq i < j \leq s + 1$ и $\alpha_i = \alpha_j$.

Другими словами, в P должно быть s несовпадающих слов одинаковой длины, но не должно быть $s+1$ несовпадающих слов одинаковой длины.

Для всех $s \in \mathbb{N}$ обозначаем через \mathbb{T}_s множество всех s -тонких множеств в алфавите A . Через \mathbb{T} обозначаем множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{T}_s$. Называем это множество *классом тонких языков*, а его элементы - *тонкими множествами*.

Введем понятие спектра множеств. Пусть $P \subseteq A^*$ - произвольное множество слов. *Спектром* этого множества называем множество $\{l(\alpha) \mid \alpha \in P\}$ и обозначаем его через $Sp(P)$.

Пусть $\mathbb{L} \subseteq Sub(A^*)$. Через $\overline{Sp}(\mathbb{L})$ обозначаем множество $\{Sp(P) \mid P \in \mathbb{L}\}$.

Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Через (a, b) обозначаем наибольший общий делитель чисел a и b .

Пусть $a, b \in \mathbb{N}^+$, $c \in \mathbb{N}$. Говорим, что числа a и b *сравнимы по модулю c* , если их разность делится нацело на c . Пишем $a \equiv b \pmod{c}$.

Пусть $a, b \in \mathbb{N}^+$. Обозначаем $(a \oplus b) = \{a + bi \mid i \in \mathbb{N}^+\}$. Называем такие множества *обобщенными арифметическими прогрессиями* или сокращенно ОАП. Множество всех ОАП обозначаем через SGAP (*Set of General Arithmetic Progressions*).

Говорим, что непустое множество $S \subseteq \mathbb{N}^+$ является *прогрессивным*, если оно представимо в виде конечного объединения ОАП.

Пусть $S \subseteq \mathbb{N}^+$ - прогрессивное множество. Называем *первой размерностью* этого множества минимальное количество ОАП, объединяя которые можно получить S . Обозначаем это число через $dim S$. Называем *второй размерностью* этого множества минимальное количество попарно непересекающихся ОАП, объединяя которые можно получить S . Обозначаем это число через $Dim S$. Корректность приведенных определений будет доказана позже.

Теорема 1.

$$\{dim S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N},$$

$$\{Dim S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N},$$

$$\{(dim S, Dim S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = (1, 1) \bigcup \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, 2 \leq m \leq n\}.$$

Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма 1. Для любых $a, c \in \mathbb{N}^+$ и $b, d \in \mathbb{N}$ верно

$$(a \oplus b) \cap (c \oplus d) \neq \emptyset \iff a \equiv c \pmod{(b, d)}.$$

Доказательство. Пусть $(a \oplus b) \cap (c \oplus d) \neq \emptyset$. Тогда существуют $i, j \in \mathbb{N}^+$ такие, что $a + i \cdot b = c + i \cdot d$. Значит, $a - c = i \cdot (b - d)$. Так как b и d делятся нацело на (b, d) , то и $b - d$ делится нацело на (b, d) . Поэтому и $a - c$ делится нацело на (b, d) , то есть $a \equiv c \pmod{(b, d)}$.

Пусть теперь $a \equiv c \pmod{(b, d)}$. Без ограничения общности считаем, что $a \geq c$. Тогда для некоторого $i \in \mathbb{N}^+$ имеем $a = c + i \cdot (b, d)$. Из расширенного алгоритма Евклида получаем существование $j, s \in \mathbb{Z}$, для которых $(b, d) = j \cdot b + s \cdot d$. Значит, $a = c + i \cdot j \cdot b + i \cdot s \cdot d$ и $a - i \cdot j \cdot b = c + i \cdot s \cdot d$. Осталось заметить, что тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ верно $a + (k \cdot d - i \cdot j) \cdot b = c + (k \cdot b + i \cdot s) \cdot d$. Очевидно, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ будет выполнено $k \cdot d - i \cdot j, k \cdot b + i \cdot s \in \mathbb{N}^+$. Значит $(a \oplus b) \cap (c \oplus d) \neq \emptyset$.

Таким образом, утверждение леммы 1 доказано.

Лемма 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно

$$\dim (\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)) = \text{Dim} (\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)) = n.$$

Доказательство. Пусть для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и некоторых $a_i, b_i \in \mathbb{N}^+$, где i пробегает значения от 1 до m , верно следующее:

$$\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n) = \bigcup_{i=1}^m (a_i \oplus b_i).$$

Рассмотрим множество $D = \{2^i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$. Предположим, что нашлись $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq m$ и $d_1, d_2 \in D$, для которых выполнено

$$d_1 < d_2, \quad d_1, d_2 \in (a_s \oplus b_s).$$

Отсюда немедленно следует, что

$$(d_1 \oplus (d_2 - d_1)) \subseteq (a_s \oplus b_s) \subseteq \mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n).$$

Значит, $(d_1 \oplus (d_2 - d_1)) \cap (0 \oplus 2^n) = \emptyset$. Так как $d_2 - d_1 \in \mathbb{N}$, то по лемме 1 получаем:

$$d_1 \not\equiv 0 \pmod{(d_2 - d_1, 2^n)}.$$

О двух размерностях спектров тонких языков

Но, так как d_1, d_2 - элементы множества D и $d_1 < d_2 < 2^n$, то $(d_2 - d_1, 2^n) = d_1$. Полученное противоречие приводит нас к выводу, что разные элементы из множества D находятся в разных $(a_i \oplus b_i)$. Значит, $m \geq |D| = n$. Этим мы показали, что

$$\dim (\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)) \geq n.$$

Кроме того,

$$\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n) = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} (2^i \oplus 2^{i+1}).$$

Это верно, так как $(2^i \oplus 2^{i+1})$ состоит из всех натуральных чисел, делящихся на 2^i и не делящихся на 2^{i+1} . Объединяя эти непересекающиеся множества, мы получим все натуральные числа кроме делящихся на 2^n . Отсюда следует, что

$$n \geq \text{Dim} (\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)).$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\text{Dim} (\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)) \geq \dim (\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)).$$

Это свойство тривиально следует из определения первой и второй размерностей и не нуждается в дальнейших комментариях.

Утверждение леммы 2 доказано.

Лемма 3. Пусть p - простое натуральное число больше 2 и $l = (a \oplus b)$ - обобщенная арифметическая прогрессия такая, что $l \subseteq (2^n \oplus 2^n) \cup (p^n \oplus p^n)$. Тогда $l \subseteq (2^n \oplus 2^n)$ или $l \subseteq (p^n \oplus p^n)$.

Доказательство. Обозначим для краткости для $i \in \mathbb{N}^+$ $l[i] = a + i \cdot b$. Будем разбирать случаи.

Случай 1. $l[0], l[1] \in (2^n \oplus 2^n)$.

Тогда $a = l[0]$, $b = l[1] - l[0]$ и оба числа делятся на 2^n . Значит, $l \subseteq (2^n \oplus 2^n)$.

Случай 2. $l[0] \in (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[2] \in (p^n \oplus p^n)$.

Тогда $l[1] \in (p^n \oplus p^n)$, то есть $l[1]$ делится на p^n . Аналогично, $l[2]$ делится на p^n . Отсюда заключаем, что и $b = l[2] - l[1]$ делится на p^n . Так как $b = l[1] - l[0]$ и $l[1]$ делится на p^n , то и $l[0]$ делится на p^n . Значит, $l[0], l[1] \in (p^n \oplus p^n)$, откуда следует, что $l \subseteq (p^n \oplus p^n)$.

Случай 3. $l[0] \in (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[2] \notin (p^n \oplus p^n)$, $l[3] \in (2^n \oplus 2^n)$.

Тогда $l[1] \in (p^n \oplus p^n)$ и $l[2] \in (2^n \oplus 2^n)$. Значит, $l[2]$ и $l[3]$ делятся на 2^n , то есть и $b = l[3] - l[2]$ делится на 2^n . Но $b = l[1] - l[0]$ и $l[0]$ делится на 2^n , а это значит, что и $l[1]$ делится на 2^n . Получаем $l[1] \in (2^n \oplus 2^n)$, что неверно. Поэтому этот случай невозможен.

Случай 4. $l[0] \in (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[2] \notin (p^n \oplus p^n)$, $l[3] \notin (2^n \oplus 2^n)$.

Тогда $l[1], l[3] \in (p^n \oplus p^n)$ и $l[2] \in (2^n \oplus 2^n)$. Так как $2b = l[3] - l[1]$ и $l[1], l[3]$ делятся на p^n , то и $2b$ делится на p^n . Из этого и того, что p - простое число больше 2, заключаем, что b делится на p^n . Но $b = l[2] - l[1]$ и $l[1]$ делится на p^n , а это значит, что и $l[2]$ делится на p^n . Получаем $l[2] \in (p^n \oplus p^n)$, что неверно. Поэтому этот случай невозможен.

Случай 5. $l[0] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \in (p^n \oplus p^n)$.

Тогда $l[0] \in (p^n \oplus p^n)$. Значит, $a = l[0]$, $b = l[1] - l[0]$ и оба числа делятся на p^n . Поэтому $l \subseteq (p^n \oplus p^n)$.

Случай 6. $l[0] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (p^n \oplus p^n)$, $l[2] \in (2^n \oplus 2^n)$.

Тогда $l[1] \in (2^n \oplus 2^n)$, то есть $l[1]$ делится на 2^n . Аналогично, $l[2]$ делится на 2^n . Отсюда заключаем, что и $b = l[2] - l[1]$ делится на 2^n . Так как $b = l[1] - l[0]$ и $l[1]$ делится на 2^n , то и $l[0]$ делится на 2^n , что неверно. Значит, этот случай невозможен.

Случай 7. $l[0] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (p^n \oplus p^n)$, $l[2] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[3] \in (p^n \oplus p^n)$.

Тогда $l[1] \in (2^n \oplus 2^n)$ и $l[0], l[2] \in (p^n \oplus p^n)$. Значит, $l[2]$ и $l[3]$ делятся на p^n , то есть и $b = l[3] - l[2]$ делится на p^n . Но $b = l[1] - l[0]$ и $l[0]$ делится на p^n , а это значит, что и $l[1]$ делится на p^n , что неверно. Поэтому этот случай невозможен.

Случай 8. $l[0] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[1] \notin (p^n \oplus p^n)$, $l[2] \notin (2^n \oplus 2^n)$, $l[3] \notin (p^n \oplus p^n)$.

Тогда $l[0], l[2] \in (p^n \oplus p^n)$ и $l[1], l[3] \in (2^n \oplus 2^n)$. Так как $2b = l[2] - l[0]$ и $l[0], l[2]$ делятся на p^n , то и $2b$ делится на p^n . Из этого и того, что p - простое число больше 2, заключаем, что b делится на p^n . Но $b = l[1] - l[0]$ и $l[0]$ делится на p^n , а это значит, что и $l[1]$ делится на p^n . Но это неверно. Значит, этот случай невозможен.

Таким образом, все случаи разобраны. Утверждение леммы 3 доказано.

О двух размерностях спектров тонких языков

Лемма 4. Пусть $S \subseteq \mathbb{N}^+$ - прогрессивное множество, $S_0 = (1 \oplus 3) \cup \{3 \cdot x \mid x \in S\}$. Тогда S_0 - прогрессивное множество и

$$\dim S_0 = 1 + \dim S, \quad \text{Dim } S_0 = 1 + \text{Dim } S.$$

Доказательство. Сначала докажем корректность определения чисел $\dim S$ и $\text{Dim } S$. Прогрессивное множество по определению можно представить в виде объединения конечного количества ОАП. Очевидно, что среди всех таких представлений найдется способ, для которого это количество минимально. Поэтому $\dim S$ существует.

Далее, пусть для некоторых $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$ верно

$$(a \oplus b) \supseteq (c \oplus d).$$

Тогда, очевидно, существуют $m \in \mathbb{N}^+, n \in \mathbb{N}$ такие, что $c = a + m \cdot b$, $d = n \cdot b$. Поэтому

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \setminus (c \oplus d) &= \\ &= (a \oplus 0) \sqcup ((a + b) \oplus 0) \sqcup \dots \sqcup ((a + (m - 1) \cdot b) \oplus 0) \sqcup \\ &\sqcup ((a + (m + 1) \cdot b \oplus n \cdot b) \sqcup ((a + (m + 2) \cdot b) \oplus n \cdot b) \sqcup \dots \sqcup \\ &\sqcup ((a + (m + n - 1) \cdot b) \oplus n \cdot b). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для любых $t_1, t_2 \in \text{SGAP}$ верно, что

$$t_1 \cap t_2 = \emptyset \text{ или } t_1 \cap t_2 \in \text{SGAP}. \quad (4.2)$$

Кроме того,

$$t_1 \setminus t_2 = t_1 \setminus (t_1 \cap t_2). \quad (4.3)$$

Из (4.1), (4.2) и (4.3) следует, что разность $t_1 \setminus t_2$ любых двух $t_1, t_2 \in \text{SGAP}$ можно представить в виде конечного объединения попарно непересекающихся ОАП.

Так как S прогрессивно, то для некоторого $k \in \mathbb{N}$ верно, что

$$S = \bigcup_{i=1}^k l_i, \text{ где } l_i \in \text{SGAP}.$$

Тогда

$$S = l_1 \sqcup (l_2 \setminus l_1) \sqcup ((l_3 \setminus l_2) \setminus l_1) \sqcup \dots \sqcup ((\dots (l_k \setminus l_{k-1}) \setminus \dots \setminus l_1).$$

П. С. Дергач

Отсюда получаем, что S можно представить в виде объединения конечного количества непересекающихся ОАП. Среди всех таких представлений найдется способ, для которого это количество минимально. Поэтому $Dim S$ существует.

Переходим к доказательству основной части леммы. Пусть $dim S = k$ и для некоторых $a_i, b_i \in \mathbb{N}^+, i = 1, \dots, k$ верно

$$S = \bigcup_{i=1}^k (a_i \oplus b_i). \quad (4.4)$$

Тогда

$$S_0 = \left(\bigcup_{i=1}^k (3 \cdot a_i \oplus 3 \cdot b_i) \right) \cup (1 \oplus 3). \quad (4.5)$$

Значит, S_0 прогрессивно. Поэтому у него существуют первая и вторая размерности. Пусть $dim S_0 = k_0$ и для некоторых $c_i, d_i \in \mathbb{N}^+, i = 1, \dots, k_0$ верно

$$S_0 = \bigcup_{i=1}^{k_0} (c_i \oplus d_i).$$

Так как

$$S_0 \cap (2 \oplus 3) = \emptyset, \quad (4.6)$$

то по лемме 1 для всех $i = 1, \dots, k_0$ верно, что d_i кратно 3. Особо отметим, что d_i при этом могут быть равны 0. Обозначаем $I = \{1, 2, \dots, k_0\}$. Рассмотрим два множества:

$$A_1 = \{i \in I \mid c_i \equiv 1 \pmod{3}\}, \quad A_2 = \{i \in I \mid c_i \equiv 0 \pmod{3}\}.$$

Из (4.6) следует, что $A_1 \sqcup A_2 = I$. Так как d_i кратно 3, то

$$\bigcup_{i \in A_1} (c_i \oplus d_i) \subseteq (1 \oplus 3) \quad \text{и} \quad \bigcup_{i \in A_2} (c_i \oplus d_i) \subseteq (0 \oplus 3).$$

Отсюда получаем:

$$\left(\bigcup_{i \in A_1} (c_i \oplus d_i) \right) \sqcup \left(\bigcup_{i \in A_2} (c_i \oplus d_i) \right) = S_0.$$

О двух размерностях спектров тонких языков

Поэтому

$$\bigcup_{i \in A_1} (c_i \oplus d_i) = S_0 \cap (1 \oplus \mathfrak{Z}) = (1 \oplus \mathfrak{Z}),$$

$$\bigcup_{i \in A_2} (c_i \oplus d_i) = S_0 \cap (0 \oplus \mathfrak{Z}) = \{\mathfrak{Z} \cdot x \mid x \in S\}.$$

По определению первой размерности получаем, что $|A_2| \geq \dim S$. Значит,

$$\dim S_0 = k_0 = |I| = |A_1| + |A_2| \geq 1 + \dim S.$$

Но из (4.5) следует, что

$$\dim S_0 \leq 1 + \dim S.$$

Объединяя два этих неравенства, окончательно получаем:

$$\dim S_0 = 1 + \dim S.$$

Заменяя в приведенном выше рассуждении знак \cup на знак \sqcup , точно так же доказывается, что

$$\text{Dim } S_0 = 1 + \text{Dim } S.$$

Утверждение леммы 4 доказано.

Лемма 5. Пусть при $n \in \mathbb{N}$

$$E_n = \{0, 1, \dots, n-1\},$$

$$\mathbb{A}(n) = \{S \in \overline{Sp}(\mathbb{T}) \mid S \neq \mathbb{N}^+, E_n \subseteq S\},$$

$$f(n) = \min_{S \in \mathbb{A}(n)} \{\text{Dim } S\}.$$

Тогда $f(n)$ неубывает и $f(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Сначала докажем, что функция f определена корректно. В работе [1] показано, что любой тонкий язык в алфавите A можно представить в виде конечного объединения множеств вида $\alpha \cdot (\beta^k)^* \cdot \gamma$, где α, β, γ - произвольные слова в алфавите A . Поэтому для любого $S \in \mathbb{T}$ верно, что его спектр можно представить в виде конечного объединения ОАП, то есть этот спектр будет прогрессивным. В доказательстве леммы 4 было показано, что у любого

П. С. Дергач

прогрессивного множества есть первая и вторая размерность. Значит, для любого $S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$ существует $Dim S$. Корректность определения функции f теперь тривиально следует из того факта, что значения $Dim S$ при $S \in \mathbb{A}(n)$ дискретны и ограничены снизу 1. Докажем, что при $n \in \mathbb{N}$ верно

$$f(n) \leq f(n+1).$$

Пусть $S_0 \in \mathbb{A}(n+1)$. Тогда $S_0 \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$ и $S_0 \neq \mathbb{N}^+$, $E_{n+1} \subseteq S_0$. Значит, $E_n \subseteq S_0$. Поэтому $S_0 \in \mathbb{A}(n)$ и $\mathbb{A}(n+1) \subseteq \mathbb{A}(n)$. Отсюда получаем:

$$f(n) = \min_{S \in \mathbb{A}(n)} \{Dim S\} \leq \min_{S \in \mathbb{A}(n+1)} \{Dim S\} = f(n+1).$$

Осталось доказать, что $f(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть это не так. Тогда из неубывания функции $f(n)$ следует, что существует $C_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $f(n) < C_0$. Докажем, что при всех $C \geq C_0$, $x \in \mathbb{N}$ выполнено:

$$f(C) \geq f\left(\left[\frac{C}{C_0}\right]\right) + 1. \quad (5.1)$$

Пусть $C \geq C_0$, $C \in \mathbb{N}$, $f(C) = k_0$. По определению функции f существует $S_0 \in \mathbb{A}(C)$ такое, что $Dim S_0 = k_0$ и для любого $S \in \mathbb{A}(C)$ выполнено $Dim S \geq k_0$. Здесь

$$S_0 \neq \mathbb{N}^+ \quad (5.2)$$

и $E_C \subseteq S_0$. По определению второй размерности существуют попарно непересекающиеся $l_1, l_2, \dots, l_{k_0} \in \mathbb{SGAP}$ такие, что

$$S_0 = \bigsqcup_{i=1}^{k_0} l_i.$$

Для каждого $i = 1, \dots, k_0$ существуют $a_i, b_i \in \mathbb{N}^+$, для которых $l_i = (a_i \oplus b_i)$. Рассмотрим множество

$$I = \{i \mid 1 \leq i \leq k_0, l_i \cap E_C \neq \emptyset\}.$$

Для $i \in I$ верно, что $a_i < C$, так как иначе $l_i \cap E_C = \emptyset$. Заметим, что

$$|I| \leq k_0 = f(C) < C_0.$$

О двух размерностях спектров тонких языков

Значит, существуют $x_1, x_2 \in E_{C_0}$ и $r \in I$ такие, что $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in (a_r \oplus b_r)$. Тогда

$$C_0 > b_r > 0 \quad (5.3)$$

и можно разделить a_r на b_r с остатком. Пусть этот остаток равен t , то есть $0 \leq t < b_r$ и $a_r \equiv t \pmod{b_r}$. Заметим, что

$$(a_r \oplus b_r) \cup E_C \supseteq (t \oplus b_r), \quad (5.4)$$

так как выше было показано, что $a_r < C$. Рассмотрим следующие ОАП:

$$(0 \oplus b_r), (1 \oplus b_r), \dots, (t-1 \oplus b_r), (t+1 \oplus b_r), \dots, (b_r-1 \oplus b_r).$$

Из (5.4) получаем, что

$$\left(\bigsqcup_{0 \leq i < b_r, i \neq t} (i \oplus b_r) \right) \cup (a_r \oplus b_r) \cup E_C \supseteq \left(\bigsqcup_{0 \leq i < b_r, i \neq t} (i \oplus b_r) \right) \cup_{(t \oplus b_r) = \mathbb{N}^+}.$$

Значит,

$$\left(\bigsqcup_{0 \leq i < b_r, i \neq t} (i \oplus b_r) \right) \cup (a_r \oplus b_r) \cup E_C = \mathbb{N}^+.$$

Так как $(a_r \oplus b_r) \subseteq S_0$ и $E_C \subseteq S_0$, то

$$\mathbb{N}^+ \setminus S_0 = \left(\left(\bigsqcup_{0 \leq i < b_r, i \neq t} (i \oplus b_r) \right) \cup (a_r \oplus b_r) \cup E_C \right) \setminus S_0 = \left(\bigsqcup_{0 \leq i < b_r, i \neq t} (i \oplus b_r) \right) \setminus S_0. \quad (5.5)$$

Из (5.2) и (5.5) получаем, что существует $u \in \mathbb{N}^+$ такое, что

$$0 \leq u < b_r, u \neq t \quad (5.6)$$

и

$$(u \oplus b_r) \not\subseteq S_0 = \bigsqcup_{i=1}^{k_0} l_i.$$

Тогда

$$\bigsqcup_{i=1}^{k_0} (l_i \cap (u \oplus b_r)) = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k_0} l_i \right) \cap (u \oplus b_r) \subsetneq (u \oplus b_r).$$

П. С. Дергач

С другой стороны,

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^{k_0} l_i \right) \cap (u \oplus b_r) = S_0 \cap (u \oplus b_r) \supseteq E_C \cap (u \oplus b_r).$$

Из (5.3) и (5.6) следует:

$$\left| E_C \cap (u \oplus b_r) \right| \geq \left[\frac{C}{b_r} \right] \geq \left[\frac{C}{C_0} \right]. \quad (5.7)$$

Объединяя предыдущие результаты, получаем:

$$E_C \cap (u \oplus b_r) \subseteq \bigsqcup_{i=1}^{k_0} (l_i \cap (u \oplus b_r)) \subsetneq (u \oplus b_r). \quad (5.8)$$

Из (5.6) вспоминаем, что $u \neq t$ и, значит,

$$l_r \cap (u \oplus b_r) = (a_r \oplus b_r) \cap (u \oplus b_r) \subseteq (t \oplus b_r) \cap (u \oplus b_r) = \emptyset.$$

Поэтому (5.8) можно переписать в следующем виде:

$$E_C \cap (u \oplus b_r) \subseteq \bigsqcup_{\substack{i=1, \dots, k_0, \\ i \neq r}} (l_i \cap (u \oplus b_r)) \subsetneq (u \oplus b_r). \quad (5.9)$$

Наконец, из (5.7), (5.9) и определения функции f получаем:

$$k_0 - 1 \geq f \left(\left[\frac{C}{C_0} \right] \right).$$

Так как $k_0 = f(C)$, то свойство (5.1) доказано. Из (5.1) и монотонного неубывания функции f мгновенно вытекает, что $f(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы 5.

Лемма 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, f - функция из леммы 5 и p - простое число больше 2 такое, что $f(p^n - 1) > n$. Тогда

$$\dim((2^n \oplus 2^n) \cup (p^n \oplus p^n)) = 2 \quad \text{и} \quad \text{Dim}((2^n \oplus 2^n) \cup (p^n \oplus p^n)) = n + 1.$$

Доказательство. Обозначим $K = (2^n \oplus 2^n) \cup (p^n \oplus p^n)$. Очевидно, что $\dim K \leq 2$. Пусть $\dim K = 1$ и для некоторых $a, b \in \mathbb{N}^+$ верно $K = (a \oplus b)$. Тогда 2^n и p^n делятся на b . Так как $(2^n, p^n) = 1$, то $b = 1$. Значит,

$$K = (a \oplus 1). \quad (6.1)$$

Но

$$(2p)^n \in K, \quad (2p)^n + 1 \notin K. \quad (6.2)$$

Очевидно, что (6.1) и (6.2) противоречат друг другу. Значит, $\dim K = 2$.

Докажем теперь, что

$$\dim K = n + 1.$$

Пусть $\dim K = k$, $E_k = \{1, \dots, k\}$ и для некоторых $a_i, b_i \in \mathbb{N}^+$, $i = 1, \dots, k$ верно

$$K = \bigsqcup_{i=1}^k (a_i \oplus b_i). \quad (6.3)$$

Вводим обозначения:

$$H_1 = \{i \cdot 2^n \mid 1 \leq i < p^n\}, \quad H_2 = \{i \cdot p^n \mid i \in E_k, i \not\equiv 0 \pmod{2^n}\},$$

$$I_1 = \{i \mid i \in E_k, H_1 \cap (a_i \oplus b_i) \neq \emptyset\}, \quad I_2 = \{i \mid i \in E_k, H_2 \cap (a_i \oplus b_i) \neq \emptyset\},$$

$$S_1 = \bigsqcup_{i \in I_1} (a_i \oplus b_i), \quad S_2 = \bigsqcup_{i \in I_2} (a_i \oplus b_i).$$

Так как $H_1 \cap (p^n \oplus p^n) = \emptyset$ и $H_2 \cap (2^n \oplus 2^n) = \emptyset$, то по лемме 3:

$$S_1 \subseteq (2^n \oplus 2^n), \quad S_2 \subseteq (p^n \oplus p^n), \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset. \quad (6.4)$$

Рассмотрим 2 случая:

$$((2p)^n \oplus (2p)^n) \subseteq S_1, \quad (1)$$

$$((2p)^n \oplus (2p)^n) \not\subseteq S_1. \quad (2)$$

Пусть верно (1). Тогда $S_2 \cap ((2p)^n \oplus (2p)^n) = \emptyset$. Отсюда и из (6.4) получаем:

$$S_2 \subseteq (p^n \oplus p^n) \setminus ((2p)^n \oplus (2p)^n) = H_2. \quad (6.5)$$

П. С. Дергач

Так как $H_2 \subseteq K$, то из (6.3) и определения множеств H_2, S_2 следует, что

$$H_2 \subseteq S_2. \quad (6.6)$$

По лемме 2 $\dim H_2 = n$. Объединяя (6.5) и (6.6), получаем:

$$H_2 = S_2 \bigsqcup_{i \in I_2} (a_i \oplus b_i).$$

Значит, $|I_2| \geq n$. Отсюда и из (6.4) получаем

$$k \geq |I_1| + |I_2| \geq n + 1. \quad (6.7)$$

Но $K = (2^n \oplus 2^n) \sqcup H_2$ и $H_2 = \{p^n \cdot i \mid i \in \mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^n)\}$. Поэтому по лемме 2

$$k = \dim K \leq 1 + \dim H_2 = 1 + n. \quad (6.8)$$

Из (6.7) и (6.8) окончательно получаем:

$$\dim K = k = n + 1.$$

Пусть теперь верно (2). Тогда, с одной стороны,

$$S_1 \subseteq (2^n \oplus 2^n) \setminus ((2p)^n \oplus (2p)^n) = \{2^n \cdot i \mid i \in \mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus p^n)\}. \quad (6.9)$$

С другой стороны,

$$\{2^n \cdot i \mid 1 \leq i < p^n\} = H_1 \subseteq S_1. \quad (6.10)$$

Так как $f(p^n - 1) > n$, то из определения функции f и из (6.9), (6.10) получаем:

$$\dim K = k \geq \dim S_1 > n.$$

Заметим, что (6.8) верно и для случая (2). Поэтому и в этом случае верно

$$\dim K = k = n + 1.$$

Утверждение леммы 6 доказано.

Доказательство основных утверждений

Теорема 1.

$$\{dim S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N},$$

$$\{Dim S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N},$$

$$\{(dim S, Dim S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = (1, 1) \cup \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, 2 \leq m \leq n\}.$$

Доказательство. Для начала заметим, что из доказательства леммы 5 следует, что у всех $S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$ существуют первая и вторая размерности.

Пусть a - буква алфавита и $n_1 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество

$$S_1 = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^{n_1})\}.$$

Очевидно, что $1 \in \mathbb{T}$. Поэтому

$$\mathbb{N}^+ \setminus (0 \oplus 2^{n_1}) = Sp(S) \in \overline{Sp}(\mathbb{T}).$$

Из леммы 2 следует, что

$$dim S_1 = Dim S_1 = n_1.$$

Значит,

$$\{dim S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N} \quad \text{и} \quad \{Dim S \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = \mathbb{N}.$$

Возьмем какое-нибудь множество $S_2 \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$, для которого $dim S_2 = 1$. Очевидно, что тогда $Dim S_2 = 1$. Поэтому

$$(1, 1) \in \{(dim S, Dim S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} \quad (1)$$

и для любого $n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$(1, n_2) \notin \{(dim S, Dim S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \quad (2)$$

Возьмем произвольное $n_3 \in \mathbb{N}$. Так как по лемме 5 $f(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то существует простое число $p > 2$ такое, что $f(p_3^n - 1) > n_3$. Обозначаем:

$$S_3 = \{a^i \mid i \in (2^{n_3} \oplus 2^{n_3}) \cup (p^{n_3} \oplus p^{n_3})\}.$$

П. С. Дергач

Очевидно, что $S_3 \in \mathbb{T}$ и по лемме 6

$$\dim Sp(S_3) = 2, \quad Dim Sp(S_3) = n_3 + 1.$$

Значит, для всех $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ верно, что

$$(2, n) \in \{(\dim S, Dim S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \quad (3)$$

Пусть теперь $n_4, n_5 \in \mathbb{N}$, $2 \leq n_4 \leq n_5$ и

$$(n_4, n_5) \in \{(\dim S, Dim S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \quad (4)$$

Тогда существует $S_4 \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$ такое, что

$$\dim S_4 = n_4, \quad Dim S_5 = n_5.$$

Обозначим через S_5 множество $(1 \oplus 3) \cup \{3 \cdot x \mid x \in S_4\}$. По лемме 5 S_5 - прогрессивное множество и

$$\dim S_5 = 1 + \dim S_4 = 1 + n_4, \quad Dim S_5 = 1 + Dim S_4 = 1 + n_5.$$

Так как S_5 является спектром тонкого множества $\{a^i \mid i \in S_5\}$, то $S_5 \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$. Значит,

$$(n_4 + 1, n_5 + 1) \in \{(\dim S, Dim S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \quad (5)$$

Из (3),(4) и (5) получаем, что при $m, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq m \leq n$ верно

$$(m, n) \in \{(\dim S, Dim S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \quad (6)$$

Осталось заметить, что для любого $S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})$ верно $\dim S \leq Dim S$. Значит, при $m, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n < m$ верно, что

$$(m, n) \notin \{(\dim S, Dim S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\}. \quad (7)$$

Объединяя (1),(2),(3),(6) и (7), окончательно получаем:

$$\{(\dim S, Dim S) \mid S \in \overline{Sp}(\mathbb{T})\} = (1, 1) \cup \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, 2 \leq m \leq n\}.$$

Утверждение теоремы 1 доказано.

Список литературы

- [1] Дергач П. С. О каноническом регулярном представлении S-тонких языков. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 211-242.
- [2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
- [3] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
- [4] Марков А. А. Введение в теорию кодирования. М.: Наука, 1982.
- [5] Алешин С. В. Полугруппы и группы автоматов. Интеллектуальные системы, 2013. Т.17, вып. 1-4, М., Сс. 129-141.
- [6] Иванов И. Е. О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 1, М., Сс. 243-252.
- [7] Часовских А. А. Условия полноты линейно-р-автоматных функций. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 3, М., Сс. 203-252.
- [8] Александров Д. Е. Об оценках автоматной сложности распознавания классов регулярных языков. Интеллектуальные системы, 2014. Т.18, вып. 4, М., Сс. 161-190.
- [9] Гасанов Э. Э. Прогнозирование периодических сверхсобытий автоматами. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 23-34.
- [10] Иванов И. Е. О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 1, М., Сс. 145-160.
- [11] Летуновский А. А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции. Интеллектуальные системы, 2014. Т.19, вып. 1, М., Сс. 161-170.
- [12] Гербус В.Г. О связи функций автомата и автоматной функции. Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 2, М., Сс. 109-116.
- [13] Миронов А. М. Критерий реализуемости функций на строках вероятностными автоматами Мура с числовым выходом. Интеллектуальные системы, 2014. Т.19, вып. 2, М., Сс. 149-160.

П. С. Дергач

- [14] Терехина И. Ю. Модель невлияния для квантовых автоматов. Интеллектуальные системы, 2014. Т.19, вып. 2, М., Сс. 183-190.

About two spectral dimensions of the thin languages

P. S. Dergach

Abstract: The article is devoted to the class \mathbb{T} of thin languages - regular languages with no more than linear growth function. For such languages it is introduced the concept of two dimensions - dim and Dim . The paper describes all possible values of this quantities. More over, we obtain all possible values of the pairs $(dimP, DimP)$, where $P \in \mathbb{T}$.

Keywords: spectrum, thin language, dimension, growth function.