Основные понятия теории вероятностных автоматов

А. М. Миронов

Излагаются основные понятия теории вероятностных автоматов, приводятся новые доказательства классических результатов теории вероятностных автоматов, связанных с эквивалентностью и редукцией вероятностных автоматов, а также излагается и доказывается критерий реализуемости вероятностных реакций конечными вероятностными автоматами общего вида, являющийся усилением соответствующего критерия Р.Г.Бухараева и Х.Хомута ([22], [23]).

Ключевые слова: вероятностные автоматы, вероятностные реакции, случайные функции.

Введение

Понятие **вероятностного автомата (ВА)** впервые было сформулировано в 1963 г. в основополагающей работе М. Рабина [1]. Данное понятие возникло как синтез понятий конечного детерминированного автомата [2] и цепи Маркова [3] и было предназначено для построения математических моделей динамических систем, в которых присутствует неопределённость, описываемая статистическими закономерностями. Эта неопределённость связана:

- с неточностью знаний о состояниях, в которых моделируемые системы находятся в процессе своего функционирования, и

- с недетерминированностью правил изменения этих состояний.

Неопределённость в ВА может быть вызвана различными причинами, которые подразделяются на два класса.

1) Причины из первого класса связаны с природой системы, моделируемой вероятностным автоматом. К ним относятся:

    - влияние случайных факторов на функционирование системы, например: случайные сбои компонентов системы или отказы в их работе, случайное изменение условий функционирования анализируемой системы, случайность потока заявок в системе массового обслуживания и т. п.;
    - несовершенство (или невозможность) точного измерения состояний этой системы.

2) Второй класс причин связан с преднамеренным внесением неточности и неопределённости в математические модели анализируемых систем. Это делается в тех случаях, когда точные модели анализируемых систем имеют неприемлемо высокую сложность и проведение анализа поведения таких систем возможно только с использованием их упрощённых моделей, в которых некоторые компоненты состояний этих систем игнорируются. В частности, анализ поведения сложной программной системы (например, операционной системы компьютера) в большинстве случаев возможен только с использованием таких упрощённых математических моделей этих систем, в которых принимаются во внимание значения лишь некоторых программных переменных, от которых существенно зависит поведение анализируемой программной системы.

Как правило, моделирование систем при помощи ВА производится:

- либо с целью анализа свойств этих систем (к числу которых относятся, например, корректность, безопасность, надёжность, устойчивость функционирования в непредусмотренных ситуациях и т. д.),

- либо с целью вычисления различных количественных характеристик анализируемых систем, среди которых могут быть, например, следующие:
  - частота выполнения тех или иных действий или переходов в анализируемых системах,
  - вероятность отказа компонентов анализируемых систем,
  - вероятность вторжения злоумышленника в компьютерную сеть,
  - математическое ожидание времени отклика веб-сервиса.

Первоначальное понятие ВА, введённое в работе М. Рабина [1], было предназначено главным образом для изучения вопросов представимости регулярных языков вероятностными автоматами. Затем оно было обобщено до такого понятия, которое позволило моделировать вероятностные преобразователи информации. Определение ВА в общей форме было введено независимо в работах Дж. Карлайла [4], Р. Г. Бухараева [5] и П. Штарке [6].

С начала возникновения понятия ВА исследовательская деятельность в этой области отличалась высокой активностью. Результаты первых лет исследований в области ВА были систематизированы в книге [7]. Подробный список (около 500) ссылок на работы с наиболее существенными теоретическими и практическими результатами по ВА, полученными до 1985 г., можно найти в фундаментальной монографии Р. Г. Бухараева [8], которую можно рассматривать как итог первого периода развития теории ВА, продолжавшегося более двух десятилетий.

В последующие годы произошло некоторое снижение активности исследований в этой области, но в настоящее время теория ВА вновь находится в состоянии подъёма. Возрождение исследовательской активности в области ВА в значительной степени связано с тем, что в связи с бурным развитием современных информационных технологий возник широкий круг новых задач, в решении которых ВА могут служить эффективным инструментом. К числу таких задач относятся задачи в следующих областях:

- верификация программ и протоколов передачи данных в компьютерных сетях,
- информационный поиск в Интернете,
- финансово-экономический анализ,
- обработка и извлечение знаний из больших массивов данных (data mining и process mining), в частности, в задачах анализа бизнес-процессов, биоинженерии и биоинформатики,
- извлечение смысла из текстов на естественных языках,
- машинное зрение и обработка изображений и др.

Началом современного этапа развития теории ВА можно считать работу [9], в которой рассмотрены ВА, возникающие при моделировании параллельных вычислительных систем с асинхронным взаимодействием. В качестве вводных текстов в современную теорию ВА можно назвать работы [10] и [11].

Главное отличие нового понятия ВА от того, которое изучалось в предшествующий период, заключается в том, что в новом понимании ВА определяется как **система переходов (transition system)**, с которой связано некоторое множество переменных. ВА функционирует путём выполнения переходов, после каждого из которых происходит обновление значений переменных этого ВА. Можно доказать, что если множество переменных ВА конечно и множества значений этих переменных тоже конечны, то новое и старое понятия ВА будут эквивалентны.

Наряду с упомянутыми выше понятиями ВА существуют и другие модели динамических систем со случайным поведением, например скрытые марковские модели (hidden Markov models)

[12], байесовские сети (Bayesian networks) [13], вероятностные графические модели [14], марковские решающие процессы (Markov decision processes) [15], вероятностные I/O автоматы (probabilistic I/O automata) [16]. Все эти модели являются частными случаями исходного понятия ВА общего вида [8].

Наряду с перечисленными выше моделями в последние годы изучаются модели динамических систем со случайным поведением, переходы в которых могут быть ассоциированы не только с вероятностями их выполнения, но и с модальностями must и may, которые позволяют существенно усилить выразительные возможности этих моделей по сравнению с другими упомянутыми выше моделями. Основные концепции и методы, относящиеся к таким моделям, содержатся в статье [17].

Также изучаются и другие обобщения понятия ВА, в частности вероятностные сети Петри [18], [19], ВА с непрерывным временем [20], вероятностные процессные алгебры [21].

Среди недавних работ российских специалистов по вероятностным автоматам и их приложениям отметим работы [29]–[36]. В [29] из лагается метод построения детерминированного аналога вероятностного автомата. В [30] изучается средняя длина кода Хафмана как случайная величина, зависящая от случайного набора вероятностей кодируемого алфавита и устанавливается асимптотика математического ожидания средней длины при увеличении мощности алфавита. В [31] изучается феномен поляризации дискретных вероятностных источников. В [32] предложена математическая модель случайного блуждания по целочисленной решетке в прямоугольной области на плоскости для представления двух-приоритетной очереди в виде двух последовательных FIFO-очередей, на основе этой модели предложен алгоритм, который позволяет для заданных вероятностей выполнения основных операций с приоритетной очередью находить оптимальный способ перераспределения памяти после переполнения одной из FIFO-очередей. В [33] рассматриваются вероятностные модели прогнозирования на примере прогноза динамики курсов акций. В [34] рассмотрен метод математического моделирования на основе вероятностных автоматов неясной, неполной и недостоверной информации, ассоциированной с опытом, практикой и с полученными ранее знаниями. Работа [35] посвящена применению вероятностных и возможностных алгоритмов и программ обучения и распознавания в условиях нечёткого описания медицинских объектов и изменчивости во времени их вероятностных характеристик. В [36] описывается критерий реализуемости функций на строках вероятностными автоматами Мура с числовым выходом.

Вспомогательные понятия

Случайные функции

Понятие случайной функции

Пусть задана пара множеств X, Y.

Случайной функцией (СФ) из X в Y называется произвольная функция f вида

$$f : X \times Y \to [0,1], \tag{1}$$

удовлетворяющая условиям:

- $\forall\, x \in X$ множество $\{y \in Y \mid f(x,y) > 0\}$ конечно или счётно,
- $\forall\, x \in X \quad \sum\limits_{y \in Y} f(x,y) = 1.$

Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ значение $f(x,y)$ можно интерпретировать как вероятность того, что СФ f отображает x в y.

Если f – СФ из X в Y, то мы будем обозначать этот факт записью $f : X \underset{r}{\to} Y$. Мы будем называть X **областью определения** СФ f, а Y – **областью значений** СФ f.

Если f и g – СФ вида $f : X \underset{r}{\to} Y, \quad g : Y \underset{r}{\to} Z$ то их **композицией** называется СФ $fg : X \underset{r}{\to} Z$, определяемая следующим образом:

$$\forall\, x \in X,\ \forall\, z \in Z \quad (fg)(x,z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{y \in Y} f(x,y)g(y,z) \qquad (2)$$

СФ (1) называется **детерминированной**, если для каждого $x \in X$ существует единственный $y \in Y$, такой, что $f(x,y) = 1$. Если f – детерминированная СФ вида (1), и x, y – такие элементы X и Y соответственно, что $f(x,y) = 1$, то мы будем говорить, что f **отображает** x **в** y.

Для каждого множества X запись id_X обозначает детерминированную СФ $X \underset{r}{\to} X$, которая отображает каждый элемент $x \in X$ в x.

Матрицы, соответствующие конечным случайным функциям

СФ называется **конечной (КСФ)**, если её область определения и область значений являются конечными множествами.

Пусть задана КСФ $f : X \underset{r}{\to} Y$, и на X и Y заданы упорядочения их элементов, которые имеют вид $(x_1, \ldots . x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ соответственно. Тогда f можно представить в виде матрицы (обозначаемой тем же символом f)

$$f = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) & \ldots & f(x_1, y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_m, y_1) & \ldots & f(x_m, y_n) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Ниже мы будем отождествлять каждую КСФ f с соответствующей ей матрицей (3).

Мы будем предполагать, что для каждого множества X, являющегося областью определения или областью значений какой-либо из рассматриваемых КСФ, на X задано фиксированное упорядочение его элементов. Таким образом, для каждой рассматриваемой КСФ соответствующая ей матрица определена однозначно.

Согласно определению произведения матриц, из (2) следует, что матрица fg является произведением матриц f и g.

Вероятностные распределения

Вероятностным распределением (или просто **распределением**) на множестве X называется произвольная СФ ξ вида

$$\xi : \mathbf{1} \underset{r}{\to} X$$

где $\mathbf{1}$ – множество, состоящее из одного элемента, который мы будем обозначать символом e. Совокупность всех распределений на X мы будем обозначать записью $X^{\triangle}$. Для каждого $x \in X$ и каждого $\xi \in X^{\triangle}$ значение $\xi(e, x)$ мы будем обозначать более коротко записью x^{ξ}. Для каждого $x \in X$ мы будем обозначать записью ξ_x распределение из $X^{\triangle}$, определяемое следующим образом: $\forall\, y \in X \;\; y^{\xi_x} \stackrel{\text{def}}{=} 1$, если $y = x$, и $y^{\xi_x} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, если $y \neq x$.

Строки и функции на строках

Строки и связанные с ними понятия

Для каждого множества X мы будем обозначать записью X^* совокупность всех конечных строк, компонентами которых являются элементы X. Множество X^* содержит **пустую строку**, она обозначается символом ε.

Для каждого $x \in X$ строка, состоящая из одного этого элемента, обозначается той же записью x.

Для каждой строки $u \in X^*$ её **длиной** называется количество компонентов этой строки. Длина пустой строки равна нулю. Длина строки u обозначается записью $|u|$.

Для каждого целого числа $k \geq 0$ записи X^k, $X^{\leq k}$, $X^{<k}$, $X^{\geq k}$, $X^{>k}$, обозначают совокупности всех строк из X^*, длина которых равна k, меньше или равна k, и т.д., соответственно.

Для каждой пары строк $u, v \in X^*$ их **конкатенацией** называется строка, обозначаемая записью uv, и определяемая следующим образом:

- $u\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon u \stackrel{\text{def}}{=} u$, и
- если $u = x_1 \ldots x_n$ и $v = x'_1 \ldots x'_m$, то $uv \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \ldots x_n x'_1 \ldots x'_m$.

Для каждой строки $u \in X^*$ запись $\tilde{u}$ обозначает строку u, записанную в обратном порядке, т.е. $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, и если $u = x_1 \ldots x_n$, то $\tilde{u} = x_n \ldots x_1$.

Функции на строках

Пусть задано конечное множество X.

Функцией на строках из X^* мы будем называть произвольную функцию вида $f : X^* \to \mathbf{R}$ (где символ $\mathbf{R}$ обозначает множество действительных чисел). Совокупность всех функций на строках из X^* мы будем обозначать записью $\mathbf{R}^{X^*}$.

На множестве $\mathbf{R}^{X^*}$ определены следующие операции.

- Для функций $f_1, f_2 \in \mathbf{R}^{X^*}$ их **сумма** $f_1 + f_2$ и **разность** $f_1 - f_2$ определяются следующим образом:

$$\forall\, u \in X^* \begin{cases} (f_1 + f_2)(u) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(u) + f_2(u), \\ (f_1 - f_2)(u) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(u) - f_2(u). \end{cases} \tag{4}$$

- Для каждого $a \in \mathbf{R}$ и каждой функции $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ **произведение** af определяется следующим образом:

$$\forall\, u \in X^* \quad (af)(u) \stackrel{\text{def}}{=} af(u). \tag{5}$$

Множество $\mathbf{R}^{X^*}$ можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbf{R}$ относительно определённых выше операций сложения и умножения на числа из $\mathbf{R}$.

Автоматы Мура

Понятие автомата Мура

Автомат Мура – это совокупность объектов

$$M = (X, Y, S, \delta, \lambda, s^0) \tag{6}$$

(называемая в этом параграфе просто **автоматом**), компоненты которой имеют следующий смысл:

- X, Y, S – множества, элементы которых называются соответственно **входными сигналами**, **выходными сигналами**, и **состояниями** автомата M,
- $\delta : S \times X \to S$ и $\lambda : S \to Y$ – отображения, называемые соответственно **отображением перехода** и **отображением выхода** автомата M,
- s^0 – элемент S, называемый **начальным состоянием** автомата M.

Автомат является моделью динамической системы, работа которой происходит в дискретном времени и заключается в

- изменении состояний под воздействием входных сигналов, поступающих на её вход, и
- выдаче в каждый момент времени $t = 0, 1, \ldots$ некоторого выходного сигнала.

Функционирование автомата M вида (6) происходит следующим образом. В каждый момент времени $t = 0, 1, \ldots$ автомат M находится в некотором состоянии $s(t)$, причем $s(0) \stackrel{\text{def}}{=} s^0$. В каждый момент времени t автомат M

- получает входной сигнал $x(t) \in X$,
- переходит в состояние $s(t+1) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(s(t), x(t))$, и
- выдаёт выходной сигнал $y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(s(t))$.

Достижимые состояния и реакция автомата

Пусть M – автомат вида (6). Для каждого $s \in S$ и каждой строки $u \in X^*$ запись su обозначает состояние, определяемое индуктивно следующим образом: $s\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} s$, и если $u = vx$, где $v \in X^*$ и $x \in X$, то $su \stackrel{\text{def}}{=} \delta(sv, x)$. Нетрудно видеть, что если строка u имеет вид $x_0 \ldots x_n$ то su – это состояние, в которое перейдёт M через $n+1$ тактов времени, при условии, что

- в текущий момент времени t он находился в состоянии s, и
- в моменты $t, t+1, \ldots, t+n$ на вход M подавались сигналы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ соответственно.

Состояние $s \in S$ называется **достижимым**, если оно имеет вид $s^0 u$ для некоторого $u \in X^*$.

Реакция автомата M – это отображение $f_M : X^* \to Y$, определяемое следующим образом:

$$\forall\, u \in X^* \quad f_M(u) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(s^0 u).$$

Нетрудно видеть, что если строка $u \in X^*$ имеет вид $x_0 \ldots x_n$, то $f_M(u)$ – это выходной сигнал, который выдает M в момент $n+1$, если в моменты $0, 1, \ldots, n$ на его вход подавались сигналы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ соответственно.

Автоматы называются **эквивалентными**, если их реакции совпадают.

Достижимая часть автомата

Пусть M – автомат вида (6). Обозначим

- символом S' множество всех достижимых состояний M, и
- символом M' автомат, получаемый из M заменой S на S', и отображений δ и λ на ограничения этих отображений на подмножества $S' \times X$ и S' соответственно.
  (нетрудно видеть, что $\forall\, s \in S'$, $\forall\, x \in X \;\; \delta(s, x) \in S'$)

Автомат M' называется **достижимой частью** автомата M. Очевидно, что M и M' эквивалентны.

Если X и S конечны, то S' может быть найдено следующим образом: определим последовательность $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$, где

- $S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{s^0\}$,
- $\forall\, i \geq 0 \quad S_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} S_i \cup \{sx \mid s \in S_i,\ x \in X\}$.

Т.к. все члены последовательности $S_0, S_1, \ldots$ – подмножества конечного множества S, то $\exists\, k < |S| : S_k = S_{k+1}$. Нетрудно видеть, что $S_k = S'$.

Линейные автоматы

Пусть заданы конечное множество X и натуральное число n.

Линейным автоматом (ЛА) размерности n над X мы будем называть тройку L вида

$$L = (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda), \tag{7}$$

где

- ξ^0 – вектор-строка размерности n над $\mathbf{R}$,
- $\forall\, x \in X \;\; L^x$ – квадратная матрица размерности n над $\mathbf{R}$, и
- λ – вектор-столбец размерности n над $\mathbf{R}$.

Для каждого ЛА L мы будем обозначать записью $\dim L$ размерность этого ЛА.

ЛА (7) определяет автомат Мура, обозначаемый тем же символом L,

- множествами входных и выходных сигналов которого являются X и $\mathbf{R}$ соответственно,
- множеством состояний которого является совокупность $\mathbf{R}^n$ всех вектор–строк размерности n над $\mathbf{R}$,
- начальным состоянием – вектор-строка ξ^0,
- отображение перехода сопоставляет паре $(\xi, x) \in \mathbf{R}^n \times X$ вектор-строку ξL^x, и
- отображение выхода сопоставляет состоянию $\xi \in \mathbf{R}^n$ число $\xi\lambda \in \mathbf{R}$.

Нетрудно видеть, что реакция f_L данного автомата сопоставляет каждой строке $u \in X^*$ число $\xi^0 L^u \lambda$, где $L^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} E$ (единичная матрица размерности n), и если строка u имеет вид $x_1 \ldots x_k$, то $L^u \stackrel{\text{def}}{=} L^{x_1} \ldots L^{x_k}$.

Пусть f – функция из $\mathbf{R}^{X^*}$. Мы будем называть её **линейно-автоматной функцией (ЛАФ)**, если для некоторого ЛА L над X верно равенство $f = f_L$.

Вероятностные автоматы

Понятие вероятностного автомата

Вероятностный автомат (ВА) – это пятерка A вида

$$A = (X, Y, S, P, \xi^0) \tag{8}$$

компоненты которой имеют следующий смысл.

1) X, Y и S – конечные множества, элементы которых называются соответственно **входными сигналами**, **выходными сигналами** и **состояниями** ВА A.

2) P – СФ вида $P : S \times X \underset{r}{\to} S \times Y$, называемая **поведением** ВА A. $\forall\,(s, x, s', y) \in S \times X \times S \times Y$ значение $P(s, x, s', y)$ понимается как вероятность того, что

   - если в текущий момент времени (t) A находится в состоянии s, и в этот момент времени на его вход поступил сигнал x,
   - то в следующий момент времени $(t+1)$ A будет находиться в состоянии s', и в момент времени t выходной сигнал A равен y.

3) ξ^0 – распределение на S, называемое **начальным распределением** ВА A. $\forall\, s \in S$ значение s^{ξ^0} понимается как вероятность того, что в начальный момент времени $(t = 0)$ ВА A находится в состоянии s.

ВА (8) называется **детерминированным**, если $\xi^0 = \xi_s$ для некоторого $s \in S$, и СФ P является детерминированной.

Матрицы, связанные с вероятностными автоматами

Пусть A – ВА вида (8), и упорядочение множества S его состояний имеет вид $(s_1, \ldots, s_n)$. Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ мы будем обозначать записью A^{xy} матрицу порядка n

$$\begin{pmatrix} P(s_1, x, s_1, y) & \ldots & P(s_1, x, s_n, y) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P(s_n, x, s_1, y) & \ldots & P(s_n, x, s_n, y) \end{pmatrix} \tag{9}$$

и для любой пары строк $u \in X^*, v \in Y^*$ мы будем обозначать записью $A^{u,v}$ (запятая в этой записи может опускаться) матрицу порядка n, определяемую следующим образом:

- $A^{\varepsilon,\varepsilon} = E$ (единичная матрица),
- если $|u| \neq |v|$, то $A^{u,v} = 0$ (нулевая матрица), и
- если $u = x_1 \ldots x_k$ и $v = y_1 \ldots y_k$, то $A^{u,v} = A^{x_1 y_1} \ldots A^{x_k y_k}$.

Пусть s – произвольное состояние из S, и в упорядочении элементов S данное состояние имеет номер i (т.е. $s = s_i$). Мы будем называть

- строку номер i матрицы $A^{u,v}$ – **строкой** s, и обозначать её записью $\vec{A}_s^{u,v}$
- столбец номер i матрицы $A^{u,v}$ – **столбцом** s, и обозначать его записью $A_s^{u,v\downarrow}$

Для любых $s, s' \in S$ мы будем обозначать записью $A_{s,s'}^{u,v}$ элемент матрицы $A^{u,v}$, находящийся в строке s столбце s'.

Если строки $u \in X^*$ и $v \in Y^*$ имеют вид $x_0 \ldots x_k$ и $y_0 \ldots y_k$ соответственно, то $A_{s,s'}^{u,v}$ можно понимать как вероятность того, что

- если в текущий момент (t) A находится в состоянии s, и, начиная с этого момента, на вход A последовательно поступали элементы строки u (т.е. в момент t поступил сигнал x_0, в момент $t+1$ поступил сигнал x_1, и т.д.)
- то в моменты $t, t+1, \ldots, t+k$ выходные сигналы A равны $y_0, \ldots, y_k$ соответственно, и в момент $t+k+1$ A будет находиться в состоянии s'.

Реакция вероятностного автомата

Пусть заданы ВА A вида (8) и распределение $\xi \in S^{\triangle}$.

Мы будем говорить, что **ВА** A **в момент времени** t **имеет распределение** ξ, если для каждого состояния $s \in S$ вероятность того, что A в момент времени t находится в состоянии s, равна s^{ξ}.

Реакцией ВА A в распределении ξ называется функция

$$A^{\xi} : X^* \times Y^* \to \mathbf{R}$$

определяемая следующим образом:

$$\forall\, u \in X^*,\, \forall\, v \in Y^* \quad A^{\xi}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \xi A^{u,v} I$$

где запись I обозначает вектор-столбец порядка $|S|$, все компоненты которого равны 1.

Реакцией ВА A мы будем называть реакцию этого ВА в его начальном распределении. Мы будем обозначать реакцию ВА A записью f_A.

Если строки $u \in X^*$ и $v \in Y^*$ имеют вид $x_0 \ldots x_k$ и $y_0 \ldots y_k$ соответственно, то $f_A(u,v)$ можно понимать как вероятность того, что если, начиная с момента 0, на вход A последовательно поступали элементы строки u (т.е. в момент 0 поступил сигнал x_0, в момент 1 поступил сигнал x_1, и т.д.), то в моменты $0, 1, \ldots, k$ выходные сигналы A равны $y_0, \ldots, y_k$ соответственно.

Теорема 1. Если A – ВА вида (8) и $\xi \in S^{\triangle}$, то A^{ξ} – СФ.

Доказательство.

Поскольку $\forall\, u \in X^*, \forall\, v \in X^*$ значение $A^{\xi}(u,v)$ неотрицательно, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что $\forall\, u \in X^* \ \sum\limits_{v \in Y^*} A^{\xi}(u,v) = 1$, т.е.

$$\forall\, u \in X^* \quad \sum_{v \in Y^*} \xi A^{u,v} I = 1. \tag{10}$$

Поскольку $A^{u,v} = 0$ при $|u| \neq |v|$, то (10) эквивалентно условию: $\forall\, k \geq 0$

$$\forall\, u \in X^k \quad \sum_{v \in Y^k} \xi A^{u,v} I = 1. \tag{11}$$

Докажем (11) индукцией по k. Если $k = 0$, то (11) следует из того, что $A^{\varepsilon,\varepsilon} = E$ и $\xi E I = \xi I = 1$ (т.к. $\xi \in S^{\triangle}$).

Пусть (11) верно для некоторого k. Докажем, что

$$\forall\, u \in X^{k+1} \quad \sum_{v \in Y^{k+1}} \xi A^{u,v} I = 1. \tag{12}$$

(12) эквивалентно соотношению

$$\forall\, u \in X^k,\ \forall\, x \in X \quad \sum_{v \in Y^k,\ y \in Y} \xi A^{ux,vy} I = 1. \tag{13}$$

Т.к. $A^{ux,vy} = A^{u,v} A^{xy}$, то (13) можно переписать в виде

$$\forall\, u \in X^k,\ \forall\, x \in X \quad \sum_{v \in Y^k} \xi A^{u,v} (\sum_{y \in Y} A^{xy} I) = 1. \tag{14}$$

(14) следует из (11) и равенства

$$\sum_{y \in Y} A^{xy} I = I \tag{15}$$

которое верно потому, что если A^{xy} имеет вид (9), то $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ элемент с индексом i столбца $\sum\limits_{y \in Y} A^{xy} I$ равен сумме

$$\sum_{y \in Y,\ j=1,\ldots,n} P(s_i, x, s_j, y)$$

которая равна 1, т.к. P – СФ вида $P : S \times X \underset{r}{\rightarrow} S \times Y$. $\blacksquare$

Нетрудно доказать, что если ВА A детерминированный, то СФ f_A – детерминированная.

Распределения $\xi_1, \xi_2 \in S^{\triangle}$ называются **эквивалентными относительно** A, если реакции A^{ξ_1} и A^{ξ_2} совпадают, т.е.

$$\forall\, u \in X^*, \forall\, v \in Y^* \qquad \xi_1 A^{u,v} I = \xi_2 A^{u,v} I.$$

Если распределения ξ_1 и ξ_2 эквивалентны относительно A, то мы будем обозначать этот факт записью $\xi_1 \underset{A}{\sim} \xi_2$.

Базисные матрицы вероятностных автоматов

Ниже мы будем использовать следующее обозначение: для каждого множества W элементов какого-либо линейного пространства мы будем обозначать записью $\langle W\rangle$ подпространство этого линейного пространства, порожденное векторами из W.

Пусть A – ВА вида (8). Обозначим записью AI совокупность всех вектор-столбцов вида $A^{u,v}I$, где $u \in X^*, v \in Y^*$.

Базисной матрицей ВА A называется матрица, обозначаемая записью $[A]$, и удовлетворяющая условиям:

- каждый столбец матрицы $[A]$ является элементом AI,
- столбцы матрицы $[A]$ образуют базис пространства $\langle AI\rangle$.

Нетрудно видеть, что для любых $\xi_1, \xi_2 \in S^{\triangle}$

$$\xi_1 \underset{A}{\sim} \xi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_1[A] = \xi_2[A].$$

Для каждого $s \in S$ мы будем называть **строкой** s матрицы $[A]$ ту её строку, которая содержит значения вида $\vec{A}_s^{u,v}I$. Мы будем обозначать эту строку записью $[A]_s$.

Матрица $[A]$ м.б. построена при помощи излагаемого ниже алгоритма.

Пусть $k \geq 0$. Обозначим записью AI_k совокупность вектор-столбцов вида $A^{u,v}I$, где $u \in X^*$, $v \in Y^*$, $|u| = |v| \leq k$. Нетрудно видеть, что

$$\langle AI_0\rangle \subseteq \langle AI_1\rangle \subseteq \langle AI_2\rangle \subseteq \ldots \quad \text{и} \quad \bigcup_{k\geq 0}\langle AI_k\rangle = \langle AI\rangle. \tag{16}$$

Поскольку все пространства $\langle AI_k\rangle$ являются подпространствами конечномерного линейного пространства (размерности $|S|$), то, следовательно, последовательность включений в (16) не может неограниченно возрастать, т.е. для некоторого k верны равенства

$$\langle AI_k\rangle = \langle AI_{k+1}\rangle = \langle AI_{k+2}\rangle = \ldots = \langle AI\rangle. \tag{17}$$

Алгоритм построения матрицы $[A]$ основан на следующей теореме.

Теорема 2. Если для некоторого k верно равенство

$$\langle AI_{k+1}\rangle = \langle AI_k\rangle \tag{18}$$

то k обладает свойством (17).

Доказательство.
Достаточно доказать равенство

$$\langle AI_{k+2}\rangle = \langle AI_k\rangle. \tag{19}$$

Пусть $V \in AI_{k+2} \setminus AI_{k+1}$, тогда V имеет вид $A^{xy}A^{u,v}I$, где $x \in X, y \in Y$ и $|u| = |v| = k+1$. Поскольку $A^{u,v}I \in AI_{k+1} \subseteq \langle AI_k\rangle$, то, следовательно, $A^{u,v}I$ является линейной комбинацией вида

$$A^{u,v}I = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i V_i \quad (\forall\, i = 1, \ldots, m \quad \lambda_i \in \mathbf{R},\ V_i \in AI_k).$$

Следовательно,

$$V = A^{xy}\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i V_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (A^{xy} V_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i W_i \tag{20}$$

где $W_i \in AI_{k+1} \subseteq \langle AI_k\rangle$. откуда на основании (20) заключаем, что V является линейной комбинацией элементов $\langle AI_k\rangle$, поэтому $V \in \langle AI_k\rangle$. Таким образом, $AI_{k+2} \subseteq \langle AI_k\rangle$, откуда следует (19). ■

Из теоремы 2 непосредственно следует, что если k – наименьший номер, для которого верно (18), то $k \leq |S| - 1$.

Используя теорему 2, можно определить следующий алгоритм построения матрицы $[A]$. Мы будем обозначать записью CA переменную, значениями которой являются множества вектор-столбцов порядка $|S|$. Алгоритм состоит из перечисленных ниже трёх шагов. Шаг 2 может выполняться несколько раз.

1) Значение CA полагается равным $\{I\}$ $(= AI_0)$.

2) Пусть $V_1, \ldots, V_m$ – список всех столбцов вида $A^{xy}V$, где $x \in X, y \in Y$ и $V \in CA$. Выполняется цикл:

   for i=1 to m do {
     if $V_i \notin \langle CA \rangle$ then V_i добавляется к CA
   }

3) Если во время выполнения шага 2 множество CA изменилось, то шаг 2 выполняется ещё раз, иначе алгоритм заканчивает работу.

Обоснуем корректность данного алгоритма. Нетрудно видеть, что если перед выполнением шага 2 было верно равенство $\langle CA \rangle = \langle AI_k \rangle$ для некоторого $k \geq 0$, то после выполнения этого шага будет верно равенство $\langle CA \rangle = \langle AI_{k+1} \rangle$. Следовательно, через не более чем $|S| - 1$ выполнений шага 2 будет верно равенство $\langle CA \rangle = \langle AI \rangle$, и шаг 2 выполнится не более $|S|$ раз. Поскольку каждый добавляемый к CA вектор V_i не принадлежит пространству $\langle CA \rangle$, то, следовательно, в каждый момент времени CA состоит из линейно независимых векторов, т.е. после завершения работы алгоритма CA является базисом пространства $\langle AI \rangle$. ■

Матричные обозначения

Мы будем использовать следующие обозначения, связанные с матрицами.

- Если ξ_1 и ξ_2 – вектор-строки размерностей n_1 и n_2 соответственно, то запись (ξ_1, ξ_2) обозначает вектор-строку размерности $n_1 + n_2$, первые n_1 компонентов которой совпадают с соответствующими компонентами ξ_1, а остальные компоненты – с соответствующими компонентами ξ_2.

- Если λ_1 и λ_2 – вектор-столбцы размерностей n_1 и n_2 соответственно, то запись $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ обозначает вектор-столбец размерности $n_1 + n_2$, первые n_1 компонентов которого совпадают с соответствующими компонентами λ_1, а остальные компоненты – с соответствующими компонентами λ_2.

- Если A и B – матрицы размерностей (m, n) и (k, l) соответственно, то запись $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$ обозначает матрицу размерности $(m+k, n+l)$, определяемую естественным образом.
- Для каждой матрицы A запись $\tilde{A}$ (или $A^\sim$) обозначает матрицу, транспонированную к матрице A.

Эквивалентность вероятностных автоматов

Пусть задана пара ВА A_1, A_2, у которых одинаковы множества входных сигналов и множества выходных сигналов, т.е. A_1 и A_2 имеют вид

$$A_i = (X, Y, S_i, P_i, \xi_i^0) \quad (i = 1, 2).$$

A_1 и A_2 называются **эквивалентными**, если их реакции совпадают, т.е. верно равенство

$$f_{A_1} = f_{A_2}. \tag{21}$$

Нетрудно доказать, что равенство (21) равносильно соотношению $\xi_1 \underset{A}{\sim} \xi_2$, где A имеет вид $(X, Y, S_1 \sqcup S_2, P, \xi^0)$, и

$$\begin{array}{l} \forall\, x \in X,\ y \in Y \quad A^{xy} = \begin{pmatrix} A_1^{xy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2^{xy} \end{pmatrix}, \\ \xi_1 = (\xi_1^0, \mathbf{0}),\ \ \xi_2 = (\mathbf{0}, \xi_2^0) \end{array} \tag{22}$$

(символы $\mathbf{0}$ в (22) изображают нулевые матрицы или вектор-строки соответствующих размеров).

Если ВА A_1 и A_2 эквивалентны, то мы будем обозначать этот факт записью $A_1 \sim A_2$.

Редукция вероятностных автоматов

Редукция ВА заключается в построении по заданному ВА A такого ВА, который был бы эквивалентен A, и содержал меньше состояний, чем A (если это возможно). Мы будем рассматривать два метода редукции: выделение достижимой части и удаление выпуклых комбинаций.

Выделение достижимой части

Пусть A – ВА вида (8). Понятие **достижимого состояния** ВА A определяется рекурсивно: состояние $s \in S$ достижимо, если

- либо $s^{\xi^0} \neq 0$,
- либо существует достижимое состояние $s' \in S$, такое, что

$$\exists\, x \in X, y \in Y : \quad P(s', x, s, y) > 0. \tag{23}$$

Нетрудно доказать, что $A \sim A_r \stackrel{\text{def}}{=} (X, Y, S_r, P_r, \xi^0_r)$, где

- S_r состоит из всех достижимых состояний ВА A, и
- P_r и ξ^0_r являются соответствующими ограничениями P и ξ^0.

ВА A_r называется **достижимой частью** ВА A. Алгоритм построения по заданному ВА его достижимой части аналогичен соответствующему алгоритму для детерминированных автоматов (см. конец пункта).

Удаление выпуклых комбинаций

Пусть A – ВА вида (X, Y, S, P, ξ^0). Мы будем говорить, что состояние $s \in S$ является **выпуклой комбинацией** других состояний ВА A, если строка s матрицы $[A]$ является выпуклой комбинацией других строк этой матрицы, т.е. существует распределение $\xi \in (S \setminus \{s\})^{\triangle}$, удовлетворяющее условию

$$[A]_s = \sum_{s' \in S \setminus \{s\}} (s')^{\xi} [A]_{s'}. \tag{24}$$

Если в множестве S состояний ВА A есть состояние s, являющееся выпуклой комбинацией других состояний этого ВА, то можно определить ВА B, который эквивалентен A, и множество состояний которого имеет вид $S \setminus \{s\}$. Мы будем говорить, что B получается из A путем удаления выпуклой комбинации s.

Автомат B определяется следующим образом. Пусть упорядочение множества S имеет вид $(s_1, \ldots, s_n)$, и вышепомянутое состояние s является последним в этом упорядочении (т.е. $s = s_n$). Обозначим символом M матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ s_1^{\xi} & s_2^{\xi} & \ldots & s_{n-1}^{\xi} & 0 \end{pmatrix}$$

и обозначим символом C ВА $(X, Y, S, Q, \xi^0 M)$, где

$$\forall\, x \in X,\ y \in Y \quad C^{xy} = A^{xy} M. \tag{25}$$

Докажем, что $\forall\, u \in X^*, v \in Y^*$ верно равенство

$$C^{u,v} I = A^{u,v} I. \tag{26}$$

(26) верно, когда u и v имеют разную длину. Для u и v одинаковой длины будем доказывать (26) индукцией по длине u.

1) (26) верно, когда $u = v = \varepsilon$.

2) Пусть (26) верно для некоторых u, v. Тогда $\forall\, x \in X, y \in Y$

$$C^{xu,yv} I = C^{xy} C^{u,v} I = A^{xy} M A^{u,v} I \tag{27}$$

(второе равенство в (27) следует из (25) и (26)).

Докажем, что верно равенство

$$MA^{u,v}I = A^{u,v}I. \qquad (28)$$

Из (24) следует. что

$$(s_1^\xi \ \ldots \ s_{n-1}^\xi \ 0)[A] = [A]_{s_n} = (0 \ \ldots \ 0 \ 1)[A]$$

откуда следует

$$M[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} [A] = [A] \qquad (29)$$

Из (29) следует, что для каждого столбца V, матрицы $[A]$ верно равенство

$$MV = V. \qquad (30)$$

Поскольку столбцы $[A]$ образуют базис $\langle AI \rangle$, то, следовательно, (30) верно в том случае, когда V является произвольным элементом $\langle AI \rangle$. В частности, (30) верно для всех векторов из AI. Таким образом, равенство (28) доказано.

Из (28) и из (27) следует, что

$$C^{xu,yv}I = A^{xy}MA^{u,v}I = A^{xy}A^{u,v}I = A^{xu,yv}I. \qquad (31)$$

Таким образом, если (26) верно, то будет верно равенство, получаемое из (26) заменой u на xu, а v – на yv.

Следовательно, (26) верно для всех $u \in X^*$, $v \in Y^*$.

Докажем, что ВА A и C эквивалентны, т.е. $f_A = f_C$. Данное равенство равносильно утверждению

$$\forall\, u \in X^*,\ \forall\, v \in Y^* \qquad \xi^0 A^{u,v}I = \xi^0 MC^{u,v}I. \qquad (32)$$

(32) следует из (26) и из (28).

Заметим, что состояние s_n ВА C не является достижимым. Действительно, т.к. последний столбец матрицы M является нулевым, то

- значение $s_n^{\xi^0 M}$, которое является последним элементом вектор-строки $\xi^0 M$, равно 0, и
- для каждого $x \in X$ и каждого $y \in Y$ последний столбец матрицы $C^{xy} = A^{xy} M$ является нулевым, поэтому неравенство (23), в котором P заменено на Q, и s – на s_n, неверно для каждого $s' \in S$.

Искомый ВА B определяется как ВА, получаемый из ВА C удалением недостижимого состояния s_n и соответствующим ограничением поведения и начального распределения ВА C. Из утверждения в пункте 2 следует, что $C \sim B$. Поскольку свойство эквивалентности ВА является транзитивным, то из $A \sim C$ и $C \sim B$ следует, что $A \sim B$. ■

Метод распознавания выпуклых комбинаций состояний

Для реализации изложенного в предыдущем пункте метода редукции ВА путем удаления выпуклых комбинаций состояний необходимо иметь алгоритм решения следующей задачи: пусть задан ВА A, и s – одно из состояний этого ВА, требуется

- определить, является ли состояние s выпуклой комбинацией других состояний ВА A, т.е. является ли строка $[A]_s$ выпуклой комбинацией других строк матрицы $[A]$, и
- если ответ на этот вопрос положителен, то найти коэффициенты этой выпуклой комбинации.

Данную задачу можно свести к задаче линейного программирования (ЗЛП), на основе нижеследующей теоремы.

Теорема 3.
Пусть задан ВА A, и s – одно из состояний этого ВА. Обозначим записью $\{W_1, \ldots, W_m\}$ совокупность строк матрицы $[A]$, за исключением строки $[A]_s$.
Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1) $[A]_s$ является выпуклой комбинацией строк $\{W_1, \ldots, W_m\}$, т.е.

$$\exists\, (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \{1, \ldots, m\}^{\triangle} : [A]_s = \sum_{i=1}^{m} \xi_i W_i. \tag{33}$$

2) Существует решение ЗЛП, в которой

- множество переменных имеет вид

$$\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$$

  где n – число состояний ВА A,

- ограничения в форме неравенств имеют вид $x_i \geq 0$ и $y_j \geq 0$, где $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$,
- ограничения в форме равенств выражаются в виде матричного равенства $(X,\ Y) \begin{pmatrix} W \\ E_n \end{pmatrix} = [A]_s$, где
  - X и Y – вектор-строки переменных:

$$X = (x_1, \ldots, x_m), \quad Y = (y_1, \ldots, y_n).$$

  - W – матрица, получаемая из $[A]$ путем удаления строки $[A]_s$,
  - E_n – единичная матрица порядка n,

  а также равенства $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 1$,

- целевая функция имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \to \min$,

и значение целевой функции на этом решении равно 0.

Доказательство.

Пусть верно утверждение 1. Тогда решение ЗЛП имеет вид $x_1 = \xi_1, \ldots, x_m = \xi_m$, $y_1 = 0, \ldots, y_n = 0$.

Обратно, пусть верно утверждение 2, т.е. существует решение ЗЛП, значение целевой функции на котором равно 0. Тогда из ограничения $y_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ следует, что значения переменных $y_1, \ldots, y_n$ на этом решении равны 0. Нетрудно видеть, что совокупность $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ значений переменных $x_1, \ldots, x_m$ на этом решении удовлетворяет условиям в соотношении (33). ■

Отметим, что одно из опорных решений ЗЛП, сформулированной в теореме 3, имеет вид $X = \mathbf{0}$, $Y = [A]_s$.

Вероятностные реакции

Понятие вероятностной реакции

Пусть X и Y – конечные множества.

Вероятностной реакцией (ВР) из X в Y называется СФ $f : X^* \underset{r}{\to} Y^*$, удовлетворяющая условию: $\forall\, u \in X^*, \forall\, v \in Y^*$

$$\begin{array}{l} \text{если } |u| \neq |v|, \text{то } f(u,v) = 0 \\ \forall\, x \in X \quad f(u,v) = \sum\limits_{y \in Y} f(ux, vy). \end{array} \tag{34}$$

Запись $R(X,Y)$ обозначает совокупность всех ВР из X в Y.

Теорема 4.
Для каждого ВА $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$ и каждого $\xi \in S^\triangle$

$$A^\xi \in R(X,Y).$$

Доказательство.

Докажем, что $\forall\, u \in X^*, \forall\, v \in Y^*$ СФ $f \stackrel{\text{def}}{=} A^\xi$ удовлетворяет условию (34).

- Если $|u| \neq |v|$, то $A^{u,v} = 0$, поэтому $A^\xi(u,v) = \xi A^{u,v} I = 0$,
- $\forall\, x \in X$

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{y \in Y} A^\xi(ux, vy) = \sum\limits_{y \in Y} \xi A^{ux,vy} I = \\ = \sum\limits_{y \in Y} \xi A^{u,v} A^{xy} I = \xi A^{u,v} (\sum\limits_{y \in Y} A^{xy} I) = \\ = \xi A^{u,v} I = A^\xi(u,v) \end{array} \tag{35}$$

(в (35) используется равенство (15)). ■

Остаточные вероятностные реакции

Пусть заданы

- конечные множества X и Y,
- ВР $f \in R(X, Y)$, и
- строки $u \in X^*, v \in Y^*$, такие, что $f(u, v) \neq 0$.

Обозначим записью $f_{u,v}$ функцию вида $f_{u,v} : X^* \times Y^* \to \mathbf{R}$, определяемую следующим образом:

$$\forall\, u' \in X^*, \forall\, v' \in Y^* \quad f_{u,v}(u', v') \overset{\text{def}}{=} \frac{f(uu', vv')}{f(u, v)}. \tag{36}$$

Теорема 5.
Если $f \in R(X, Y)$ и $f(u, v) \neq 0$, то функция $f_{u,v}$, определяемая соотношением (36), является СФ.

Доказательство.
Поскольку все значения функции $f_{u,v}$ неотрицательны, то достаточно доказать, что

$$\forall\, u' \in X^* \quad \sum_{v' \in Y^*} f_{u,v}(u', v') = 1. \tag{37}$$

(37) эквивалентно соотношению

$$\forall\, u' \in X^* \quad \sum_{v' \in Y^*} f(uu', vv') = f(u, v). \tag{38}$$

Из предположения $f(u, v) \neq 0$ следует, что $|u| = |v|$. Поэтому $f(uu', vv') = 0$ при $|u'| \neq |v'|$, и, следовательно, (38) эквивалентно условию: $\forall\, k \geq 0$

$$\forall\, u' \in X^k \quad \sum_{v' \in Y^k} f(uu', vv') = f(u, v). \tag{39}$$

Докажем (39) индукцией по k. Если $k = 0$, то (39), очевидно, верно. Пусть (39) верно для некоторого k. Докажем, что

$$\forall\, u' \in X^{k+1} \quad \sum_{v' \in Y^{k+1}} f(uu', vv') = f(u, v). \tag{40}$$

(40) эквивалентно утверждению: $\forall\, u' \in X^k,\ \forall\, x \in X$

$$\sum_{v' \in Y^k,\ y \in Y} f(uu'x, vv'y) = f(u, v). \tag{41}$$

Поскольку $\forall\, x \in X,\ \forall\, u' \in X^k,\ \forall\, v' \in Y^k$

$$f(uu', vv') = \sum_{y \in Y} f(uu'x, vv'y)$$

то (41) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sum_{v' \in Y^k,\ y \in Y} f(uu'x, vv'y) = \sum_{v' \in Y^k} (\sum_{y \in Y} f(uu'x, vv'y)) = \\ &= \sum_{v' \in Y^k} f(uu', vv') = f(u, v). \end{aligned} \tag{42}$$

Последнее равенство в (42) совпадает с равенством в (39), и оно верно по индуктивному предположению. ■

Теорема 6.
Если $f \in R(X, Y)$ и $f(u, v) \neq 0$, то $f_{u,v} \in R(X, Y)$.

Доказательство.
Требуется доказать, что $\forall\, u' \in X^*, \forall\, v' \in Y^*$

$$\begin{array}{l} \text{если } |u'| \neq |v'|, \text{то } f_{u,v}(u', v') = 0 \\ \forall\, x \in X \quad f_{u,v}(u', v') = \sum\limits_{y \in Y} f_{u,v}(u'x, v'y). \end{array} \tag{43}$$

Из условия $f(u, v) \neq 0$ следует, что $|u| = |v|$, поэтому, согласно определению функции f_{uv}, можно переписать (43) следующим образом:

$$\begin{array}{l} \text{если } |uu'| \neq |vv'|, \text{то } f(uu', vv') = 0 \\ \forall\, x \in X \quad f(uu', vv') = \sum\limits_{y \in Y} f(uu'x, vv'y). \end{array} \tag{44}$$

Первое утверждение в (44) верно потому, что f – ВР, а второе утверждение следует из доказанного выше соотношения

(39) (в данном случае $k = 1$). ■

Теорема 7.
Если $f \in R(X,Y)$, $f(u,v) \neq 0$ и $f(uu', vv') \neq 0$, то

$$f_{uu',vv'} = (f_{u,v})_{u',v'}.$$

Доказательство.
$\forall\, u'' \in X^*, \forall\, v'' \in Y^*$

(a) $f_{uu',vv'}(u'', v'') = \frac{f(uu'u'', vv'v'')}{f(uu', vv')}$

(b) $(f_{u,v})_{u',v'}(u'', v'') = \frac{f_{u,v}(u'u'', v'v'')}{f_{u,v}(u', v')} = \frac{f(uu'u'', vv'v'')/f(u,v)}{f(uu', vv')/f(u,v)}$

Нетрудно видеть, что правые части в (a) и (b) совпадают. ■

Если $f \in R(X,Y)$ и u, v – строки из X^* и Y^* соответственно, такие, что $f(u,v) \neq 0$, то $f_{u,v}$ называется **остаточной ВР** для f. Мы будем обозначать записью S_f совокупность всех остаточных ВР для f. Отметим, что $f \in S_f$, т.к. $f(\varepsilon, \varepsilon) = 1$, поэтому $f_{\varepsilon,\varepsilon} = f$.

Обозначим записью A_f пятерку (X, Y, S_f, P_f, ξ_f), где P_f – СФ вида

$$P_f : S_f \times X \underset{r}{\to} S_f \times Y,$$

определяемая следующим образом:

$$\begin{array}{l} \forall\, g, g' \in S_f,\ \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y \\ P_f(g, x, g', y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} g(x,y), & \text{если } g' = g_{x,y}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{array} \tag{45}$$

Теорема 8.
Если $f \in R(X,Y)$ и $|S_f| < \infty$, то A_f – ВА, и $f_{A_f} = f$.

Доказательство.
Из определения СФ P_f следует, что для любых $g \in S_f$, $x \in X$, $y \in Y$, таких, что $g(x,y) \neq 0$, верно равенство

$$\xi_g A_f^{xy} = g(x,y)\xi_{g_{x,y}}. \tag{46}$$

(напомним, что ξ_g – распределение, такое, что $\forall\, h \in S_f \;\; h^{\xi_g} = 1$, если $h = g$, и $h^{\xi_g} = 0$, если $h \neq g$).

Докажем, что $\forall\, u \in X^*$, $\forall\, v \in Y^* : f(u,v) \neq 0$

$$\xi_f A_f^{u,v} = f(u,v)\xi_{f_{u,v}}. \tag{47}$$

Доказательство будем вести индукцией по длине u.

Если $|u| = 0$, т.е. $u = v = \varepsilon$, то обе части (47) равны ξ_f.

Иначе u и v имеют вид $u'x$ и $v'y$ соответственно, причём $f(u',v') \neq 0$, (т.к. если $f(u',v') = 0 = \sum\limits_{y' \in Y} f(u'x, v'y')$, то $f(u,v) = f(u'x, v'y) = 0$), и, по индуктивному предположению, верно равенство

$$\xi_f A_f^{u',v'} = f(u',v')\xi_{f_{u',v'}}. \tag{48}$$

Используя (46), (48) и теорему 7, получаем цепочку равенств

$$\begin{array}{l} \xi_f A_f^{u,v} = \\ = \xi_f A_f^{u'x,v'y} = \xi_f A_f^{u',v'} A_f^{x,y} = \\ = f(u',v')\xi_{f_{u',v'}} A_f^{x,y} = \\ = f(u',v') f_{u',v'}(x,y) \xi_{(f_{u',v'})_{x,y}} = \\ = f(u',v') \frac{f(u'x,v'y)}{f(u',v')} \xi_{f_{u'x,v'y}} = \\ = f(u'x,v'y)\xi_{f_{u'x,v'y}} = f(u,v)\xi_{f_{u,v}}. \end{array} \tag{49}$$

Таким образом, для любых $u \in X^*$, $v \in Y^*$, таких, что $f(u,v) \neq 0$, верно равенство (47), из которого следует цепочка равенств

$$\begin{array}{l} A_f^{\xi_f}(u,v) = \xi_f A_f^{u,v} I = \\ = f(u,v)\xi_{f_{u,v}} I = f(u,v) \cdot 1 = f(u,v). \end{array}$$

Следовательно, в случае $f(u,v) \neq 0$ верно равенство

$$f_{A_f}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} A_f^{\xi_f}(u,v) = f(u,v). \tag{50}$$

Докажем, что (50) верно и в случае $f(u,v) = 0$.

- Если $|u| \neq |v|$, то левая часть (50) равна 0 по определению матриц вида $A^{u,v}$.

- Пусть $|u| = |v| > 0$, и u и v имеют вид $x_1 \ldots x_n$ и $y_1 \ldots y_n$ соответственно. Существуют номер $k \in \{1, \ldots, n\}$ и строки u', v', такие, что

$$\begin{array}{l} u = u'x_k \ldots x_n,\ v = v'y_k \ldots y_n, \\ f(u', v') \neq 0,\ f(u'x_k, v'y_k) = 0. \end{array} \quad (51)$$

Имеем цепочку равенств

$$\begin{array}{l} A_f^{\xi_f}(u, v) = \xi_f A_f^{u',v'} A_f^{x_k,y_k} \ldots A_f^{x_n,y_n} I = \\ = f(u', v') \xi_{f_{u',v'}} A_f^{x_k,y_k} \ldots A_f^{x_n,y_n} I \end{array} \quad (52)$$

Строка $\xi_{f_{u',v'}} A_f^{x_k,y_k}$ является нулевой, поскольку её элементы имеют вид

$$P_f(g, x_k, g', y_k) \quad (53)$$

где $g = f_{u',v'}$, и, согласно определению (45) СФ P_f, элемент (53) отличен от 0 если и только если $f_{u',v'}(x_k, y_k) \neq 0$, т.е. $f(u'x_k, v'y_k) \neq 0$. Учитывая (51), получаем, что все элементы (53) равны 0, т.е. $\xi_{f_{u',v'}} A_f^{x_k,y_k}$ является нулевой строкой. Таким образом, правая часть в (52) равна 0, откуда следует, что равенство (50) в рассматриваемом случае также верно. ■

Реализуемость вероятностных реакций

ВР f называется **реализуемой**, если $\exists$ ВА $A: \ f_A = f$.

Согласно теореме 8, если $|S_f| < \infty$, то f реализуема. Обращение этого утверждения неверно: согласно нижеследующей теореме, существует реализуемая ВР f, такая, что $|S_f| = \infty$.

Теорема 9.

Пусть $f = f_A$, где A – ВА вида (X, Y, S, P, ξ^0), компоненты которого удовлетворяют условиям:

$$\begin{array}{l} |S| = 2,\ \xi^0 = (1, 0), \\ \exists x \in X, \exists y \in Y : A^{x,y} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in (0, 1)). \end{array}$$

Тогда $|S_f| = \infty$.

Доказательство.

Если $u_k = \underbrace{x\ldots x}_{k}$, $v_k = \underbrace{y\ldots y}_{k}$, то $A^{u_k,v_k} = \alpha^k \begin{pmatrix} 1 & k\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, поэтому $f(u_k,v_k) = \alpha^k(1+k\beta)$. $\forall\, k \geq 1$ определена остаточная ВР f_{u_k,v_k}, и нетрудно видеть, что $\forall\, s \geq 1$

$$f_{u_k,v_k}(u_s,v_s) = \tfrac{f(u_k u_s, v_k v_s)}{f(u_k,v_k)} = \tfrac{\alpha^{k+s}(1+(k+s)\beta)}{\alpha^k(1+k\beta)} = \tfrac{\alpha^s(1+(k+s)\beta)}{1+k\beta}.$$

Если для некоторых $k_1, k_2 \geq 1$ функции $f_{u_{k_1},v_{k_1}}$ и $f_{u_{k_2},v_{k_2}}$ совпадают, то

$$\forall\, s \geq 1 \quad \tfrac{\alpha^s(1+(k_1+s)\beta)}{1+k_1\beta} = \tfrac{\alpha^s(1+(k_2+s)\beta)}{1+k_2\beta},$$

откуда следует, что $k_1 = k_2$. Таким образом, при различных k функции f_{u_k,v_k} различны, т.е. $|S_f| = \infty$. ■

Пусть X и Y – конечные множества. Мы будем использовать следующие определения и обозначения.

- Запись $[0,1]^{X^*\times Y^*}$ обозначает множество функций вида
$$f : X^* \times Y^* \to [0,1].$$
- Для каждого $\Gamma \subseteq [0,1]^{X^*\times Y^*}$ **конусом** над Γ называется подмножество $C_0(\Gamma) \subseteq [0,1]^{X^*\times Y^*}$, состоящее из функций вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i$, где
  - $\forall\, i = 1,\ldots,n \quad a_i \in [0,1],\ f_i \in \Gamma, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq 1$, и
  - $\forall\, (u,v) \in X^* \times Y^* \quad \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i\Big)(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i(u,v)$.
- $\forall\, x \in X, \forall\, y \in Y$ запись D^{xy} обозначает отображение вида
$$D^{xy} : [0,1]^{X^*\times Y^*} \to [0,1]^{X^*\times Y^*},$$

называемое **сдвигом**, сопоставляющее каждой функции f из $[0,1]^{X^*\times Y^*}$ функцию, обозначаемую записью fD^{xy}, где

$$\forall\, u \in X^*, \forall\, v \in Y^* \quad (fD^{xy})(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} f(xu, yv). \tag{54}$$

- Подмножество $\Gamma \subseteq [0,1]^{X^*\times Y^*}$ называется **устойчивым относительно сдвигов**, если

$$\forall\, f \in \Gamma,\ \forall\, x \in X, \forall\, y \in Y \quad fD^{xy} \in C_0(\Gamma).$$

Теорема 10.
Пусть X и Y – конечные множества, и $f \in R(X,Y)$. Следующие условия эквивалентны:

- f реализуема,
- $\exists$ конечное $\Gamma \subseteq R(X,Y)$, устойчивое относительно сдвигов, и такое, что $f \in C_0(\Gamma)$.

Доказательство.
Пусть f реализуема, т.е. $\exists$ ВА $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$:

$$\forall\, u \in X^*, \forall\, v \in Y^* \quad f(u,v) = \xi^0 A^{u,v} I.$$

$\forall\, s \in S$ обозначим записью A_s ВА (X, Y, S, P, ξ_s). В качестве искомого Γ можно взять множество $\{f_{A_s} \mid s \in S\}$.

$f \in C_0(\Gamma)$, т.к. $f = \sum\limits_{s\in S} s^{\xi^0} f_{A_s}$, и $\Gamma \subseteq R(X,Y)$ (по теореме 4).

Докажем, что Γ устойчиво относительно сдвигов, т.е. $\forall\, s \in S$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, y \in Y$ $f_{A_s} D^{xy} \in C_0(\Gamma)$. Согласно (54),

$$\begin{array}{l} \forall\, u \in X^*, \forall\, v \in Y^* \\ (f_{A_s} D^{xy})(u,v) = f_{A_s}(xu, yv) = \xi_s A^{xu,yv} I = \xi_s A^{xy} A^{u,v} I. \end{array} \tag{55}$$

Нетрудно видеть, что

$$\xi_s A^{xy} A^{u,v} I = \sum_{s' \in S} a_{s'} f_{A_{s'}}(u,v)$$

где $\forall\, s' \in S$ $a_{s'}$ – компонента вектор-строки $\xi_s A^{xy}$, соответствующая состоянию s' (т.е. элемент матрицы A^{xy}, находящийся в строке s столбце s'). Свойства $\forall\, s' \in S \;\; a_{s'} \in [0,1]$ и $\sum\limits_{s' \in S} a_{s'} \leq 1$ являются следствием соответствующих свойств матрицы A^{xy}.

Обратно, пусть $f \in C_0(\Gamma)$, где $\Gamma = \{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq R(X,Y)$, и Γ устойчиво относительно сдвигов. Определим A как ВА

$$A \stackrel{\text{def}}{=} (X, Y, S, P, \xi^0), \tag{56}$$

компоненты которого имеют следующий вид.

- $S \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$.
- $\xi^0 = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_1, \ldots, a_n$ – коэффициенты представления f в виде суммы

  $$f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i, \quad \text{где } \forall\, i = 1, \ldots, n \;\; a_i \geq 0,\; \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1. \tag{57}$$

  По предположению, $f \in R(X,Y)$, в частности, $f(\varepsilon, \varepsilon) = 1$, откуда следует равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, поэтому $\xi^0 \in S^{\triangle}$.

- Поведение $P : S \times X \times S \times Y \to [0,1]$ ВА (56) определяется матрицами A^{xy} порядка n ($x \in X, y \in Y$):

  $$P(i, x, j, y) \stackrel{\text{def}}{=} A^{xy}_{ij},$$

  где $\forall\, x \in X, \forall\, y \in Y, \forall\, i = 1, \ldots, n$ строка i матрицы A^{xy} состоит из элементов $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ представления функции $f_i D^{xy}$ в виде суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$ ($\forall\, i, j \;\; a_{ij} \geq 0,\; \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$).

  Докажем, что P является СФ вида $S \times X \underset{r}{\to} S \times Y$. Данное утверждение эквивалентно соотношению $\Big(\sum\limits_{y \in Y} A^{xy}\Big) I = I$.

  $\forall\, i = 1, \ldots, n$ из

  $$f_i D^{xy} = \sum_{j=1}^{n} A^{xy}_{ij} f_j \tag{58}$$

следует, что

$$(f_i D^{xy})(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{xy} f_j(\varepsilon, \varepsilon). \tag{59}$$

Т.к. $\forall\, i = 1, \ldots, n \quad f_j \in R(X, Y)$, то $f_j(\varepsilon, \varepsilon) = 1$. Кроме того, левая часть (59) равна $f_i(x, y)$. Поэтому (59) можно переписать в виде $f_i(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}^{xy}$, откуда следует соотношение

$$\sum_{y \in Y} f_i(x, y) = \sum_{y \in Y} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{xy}. \tag{60}$$

Т.к. $f_i \in R(X, Y)$, то, согласно второму соотношению в (34), левая часть (60) равна $f_i(\varepsilon, \varepsilon)$, т.е. равна 1. Учитывая это, и поменяв порядок суммирования в правой части (60), получаем соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{y \in Y} A_{ij}^{xy} = 1. \tag{61}$$

Нетрудно видеть, что истинность (61) $\forall\, i = 1, \ldots, n$ эквивалентна доказываемому равенству $\Big(\sum\limits_{y \in Y} A^{xy} \Big) I = I$.

Докажем, что реакция ВА (56) совпадает с f, т.е.

$$\forall\, u \in X^*, \forall\, v \in Y^* \quad \xi^0 A^{u,v} I = f(u, v). \tag{62}$$

Если $|u| \neq |v|$, то левая часть равенства в (62) равна 0 по определению матриц вида $A^{u,v}$, и правая часть равенства в (62) равна 0 согласно предположению $f \in R(X, Y)$ и первому соотношению в (34).

Пусть $|u| = |v|$. Докажем (индукцией по $|u|$), что

$$A^{u,v} I = \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ \ldots \\ f_n(u, v) \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Если $u = v = \varepsilon$, то обе части (63) равны I.

Если $u = xu'$ и $v = yv'$, то, предполагая верным равенство (63), в котором u и v заменены на u' и v', имеем:

$$A^{u,v}I = A^{xu',yv'}I = A^{xy}A^{u',v'}I = A^{xy}\begin{pmatrix} f_1(u',v') \\ \dots \\ f_n(u',v') \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} A^{xy}_{1j} f_j(u',v') \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A^{xy}_{nj} f_j(u',v') \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Из (58) следует, что правую часть в (64) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} (f_1 D^{xy})(u',v') \\ \dots \\ (f_n D^{xy})(u',v') \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Согласно определению (54) функций вида fD^{xy}, столбец (65) совпадает с правой частью доказываемого равенства (63).

Таким образом, равенство (63) доказано. Согласно этому равенству, левая часть доказываемого равенства (62) равна

$$\xi^0 \begin{pmatrix} f_1(u,v) \\ \dots \\ f_n(u,v) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \xi^0_i f_i(u,v). \tag{66}$$

По определению ξ^0 (см. (57)), правая часть (66) равна $f(u,v)$, т.е. правой части доказываемого равенства (62). ■

Заключение

В настоящей статье рассмотрены основные понятия теории вероятностных автоматов, приведены новые доказательства классических результатов теории вероятностных автоматов, связанных с эквивалентностью и редукцией вероятностных автоматов, а также сформулирован и доказан критерий реализуемости вероятностных реакций конечными вероятностными автоматами общего вида, являющийся усилением соответствующего критерия Р.Г.Бухараева и Х.Хомута ([22], [23]). Однако проверка этого критерия для заданной ВР f может представлять некоторые трудности, поскольку для доказательства реализуемости f необходимо построить конечное множество ВР Γ_f, удовлетворяющее условию теоремы 10. Одним из направлений развития изложенного в настоящей работе результата может быть нахождение стратегий построения для заданной ВР f соответствующего множества ВР Γ_f.

Кроме того, поскольку множество Γ_f для заданной ВР f можно рассматривать как множество состояний одного из ВА, реакция которого совпадает с f, то, следовательно, к проблеме построения для заданной ВР f соответствующего множества Γ_f с наименьшим возможным числом элементов сводится проблема построения для заданного ВА A такого ВА, реакция которого совпадает с реакцией ВА A, и который содержит наименьшее возможное число состояний (поскольку в качестве исходной ВР f можно рассматривать реакцию ВА A). Данная проблема известна как проблема минимизации автоматов, и является одним из наиболее популярных предметов исследований в области теории вероятностных автоматов. Среди последних результатов, относящихся к решению данной проблемы, отметим работы [26]–[28]. Одним из путей развития данных результатов может быть разработка на их основе методов построения для заданной ВР f соответствующего множества Γ_f, которое содержит как можно меньшее число элементов.

Список литературы

[1] Rabin, M.O., Probabilistic automata. Information and Control 6(3), 230–245 (1963). (русский перевод: Рабин М.О. Вероятностные автоматы / Кибернетический сборник, - Вып. 9. -М.: Иностранная литература, 1964.- С. 123-141.)

[2] Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию

автоматов, языков и вычислений 2-е изд.: Пер. с англ. - М.: Издательский дом "Вильямс 2002. - 528 с.

[3] Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова.—М.: Наука, 1970.

[4] Carlyle J. W., Reduced forms for stochastic sequential machines, J. Maht. Analysis and Application, 1963, v. 7, № 2 (русский перевод: Карлайл Е.У., Приведенные формы для стохастических последовательностных машин // Кибернетический сборник. Новая серия.- М.: Мир, 1966. - Вып. 3. - С. 101-110.).

[5] Бухараев Р.Г. Некоторые эквивалентности в теории вероятностных автоматов, уч. записки Казан. ун-та, 1964, 124, номер 2, с. 45-65.

[6] Starke P. H., Theorie stochastischen Automaten, I, II, Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik, 1965, 1, No. 2.

[7] A. Paz, Introduction to Probabilistic Automata. Academic Press, New York, USA, 1971.

[8] Бухараев Р. Г. Основы теории вероятностных автоматов.—М.: Наука, 1985.

[9] R.Segala, N.A.Lynch, Probabilistic simulations for probabilistic processes, Nordic Journal of Computing, 2 (2) (1995), p. 250–273.

[10] M. Stoelinga, An introduction to probabilistic automata, Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science, 2002, p. 176–198.

[11] A. Sokolova, E.P. de Vink, Probabilistic Automata: System Types, Parallel Composition and Comparison, in: C. Baier et al. (Eds.), Validation of Stochastic Systems, LNCS 2925, pp. 1-43, 2004.

[12] L.R. Rabiner, A tutorial on Hidden Markov Models and selected applications in speech recognition, in Proceedings of the IEEE 77 (2): 257–286, 1989.

[13] A. Darwiche, Modeling and Reasoning with Bayesian Networks. Cambridge University Press, 2009. 562 p.

[14] D.Koller and N.Friedman, Probabilistic Graphical Models. Principles and Techniques. Massachusetts: MIT Press, 2009. 1280 p.

[15] E.A. Feinberg and A. Shwartz (eds.), Handbook of Markov Decision Processes, Kluwer, Boston, MA, 2002. 562 p.

[16] S.-H. Wu, S. A. Smolka, and E. W. Stark, Composition and behaviors of probabilistic I/O automata, Theoretical Computer Science 176 (1997), p. 1-38.

[17] B. Delahaye, J.-P. Katoen, K.G. Larsen, A.Legay, M.L. Pedersen, F. Sher, A. Wasowski, Abstract Probabilistic Automata, Information and Computation, Elsevier, 232, (2013), p. 66-116.

[18] M. Kudlek. Probability in Petri nets. Fundamenta Informaticae, 67 (1-3): 121-130, 2005.

[19] Y. Liu, H. Miao, H. Zeng, and Z. Li. Probabilistic Petri net and its logical semantics. In Software Engineering Research, Management and Applications, pages 73–78, 2011.

[20] C. Eisentraut, H. Hermanns, and L. Zhang. On probabilistic automata in continuous time. In Proc. of 25th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS), pages 342-351, 2010.

[21] B. Jonsson, K.G. Larsen, and W. Yi, Probabilistic extensions of process algebras, Handbook of Process Algebras, Elsevier, North Holland, 2001.

[22] Бухараев Р.Г., Теория абстрактных вероятностных автоматов, в кн.: Проблемы кибернетики, вып. 30, М.: Наука, 1975.

[23] Homuth H.H. A type of stochastic automation applicable to the communication channel. - Angew. Inform., 1971, No.8, p.362-372.

[24] Бухараев Р. Г. Сети вероятностных процессоров // Математические вопросы кибернетики. Вып. 16. — М.: Физматлит, 2007. — С. 57–72.

URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2007-57

[25] Э. Ф. Мур, Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. сб. "Автоматы". М.: ИЛ. - 1956. - с. 179-210.

[26] А. М. Миронов, С. Л. Френкель. Минимизация вероятностных моделей программ. Фундаментальная и прикладная математика, т. 19, вып.1, с. 121-163. (2014)

[27] Kiefer, S., Wachter, B., Stability and Complexity of Minimising Probabilistic Automata. J. Esparza et al. (Eds.): ICALP 2014, Part II, LNCS 8573, pp. 268–279, 2014. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[28] Mateus, P., Qiu, D., Li, L.: On the complexity of minimizing probabilistic and quantum automata. Information and Computation 218, 36–53 (2012)

[29] Пархоменко Д.В., Вторая автоматная функция и с нею связанные классы регулярных языков. Интеллектуальные системы, том 17, выпуск 1-4, с. 186-187 (2013).

[30] Кучеренко Н.С., Математическое ожидание средней длины кодов Хафмана. Интеллектуальные системы, том 17, выпуск 1-4, с. 241-244 (2013).

[31] Пантелеев П.А., О поляризации источников Бернулли случайными линейными преобразованиями. Интеллектуальные системы, том 17, выпуск 1-4, с. 257-258 (2013).

[32] Аксенова Е.А., Соколов А.В., Оптимальный метод перераспределения общей памяти для двухприоритетной очереди, представленной в виде двух последовательных циклических FIFO-очередей. Интеллектуальные системы, том 17, выпуск 1-4, с. 417-421 (2013).

[33] Андреев А.В., Пытьев Ю.П., Построение и анализ детерминированных методов прогнозирования. Интеллектуальные системы, том 17, выпуск 1-4, с. 422-426 (2013).

[34] Пытьев Ю.П. Математическое моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования. Интеллектуальные системы, том 17, выпуск 1-4, с. 507-516 (2013).

[35] В.А. Газарян, Ю.П. Пытьев, П.Б. Росницкий, Вероятностные и возможностные методы постановки медицинского диагноза. Интеллектуальные системы, том 18, вып. 4, 15-35 (2014).

[36] А.М. Миронов, Критерий реализуемости функций на строках вероятностными автоматами Мура с числовым выходом. Интеллектуальные системы, том 19, вып. 2, 175-185 (2015).

Main concepts of a theory of probabilistic automata

A. M. Mironov

The basic concepts of a theory of probabilistic automata are presented. We deliver new proofs of classical theorems related to equivalence and reduction of probabilistic automata. We provide and prove a new criterion of realizability of probabilistic reactions by finite probability automata of general form.

Keywords: probabilistic automata, equivalence, reduction, realizability, probabilistic reaction.