Исследование алгоритма, задающего функцию выхода прогнозирующего автомата

И. К. Ведерников (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

В данной работе показано, что оптимальная функция выхода может быть получена алгоритмом, который используется в доказательстве критерия прогнозируемости для общерегулярных сверхсобытий в многозначном алфавите, а также, что степень прогнозирования сверхсобытия автоматом, полученным путем использования этого алгоритма, может отличаться от оптимальной в любое количество раз.

Ключевые слова: прогнозирующий автомат, прогнозирование сверхсобытий, автоматный цикл.

В статье А. Г. Вереникина и Э. Э. Гасанова [1] были введены прогнозирующие автоматы — конечные автоматы, предсказывающие сверхслово или множество сверхслов. Автомат прогнозирует сверхслово, если через некоторое конечное время после начала подачи сверхслова, он начинает угадывать каждый следующий символ, то есть на выходе в момент времени t выдавать элемент входной последовательности под номером $t+1$.

В работе [2] А. А. Мастихиной было введено понятие частичного прогнозирования, которое имеет место в случае, когда автомат угадывает следующий символ не обязательно в каждый момент времени, но достаточно часто. А в работе [3] для общерегулярных сверхсобытий в двоичном алфавите получен критерий прогнозируемости.

Позднее был доказан анологичный критерий для многозначных алфавитов. В доказательстве был сформулирован и обоснован один из алгоритмов, позволяющий представляющий автомат преобразовать в прогнозирующий.

В данной работе показано, что оптимальная функция выхода может быть получена этим алгоритмом, а также, что степень прогнозирования сверхсобытия автоматом, полученным путем использования этого алгоритма, может отличаться от оптимальной в любое количество раз.

Введем основные определения.

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ — конечный алфавит. Через E_k^* и E_k^∞ обозначим соответственно множество всех слов конечной длины и множество всех сверхслов в алфавите E_k. По определению будем считать, что пустое слово Λ принадлежит E_k^*. Подмножества E_k^* называются *событиями*, а подмножества E_k^∞ — *сверхсобытиями*.

Если α — сверхслово в алфавите E_k, n — натуральное число, то n-ую букву сверхслова α будем обозначать $\alpha(n)$, а через $\alpha\,\underset{n}{]}$ обозначим префикс длины n сверхслова α, то есть $\alpha\,\underset{n}{]} = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(n)$.

В работе рассматриваются конечные инициальные автоматы в соответствии с нотацией из [4]:

$$V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0),$$

где $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ — входной и выходной алфавит, Q — множество состояний, которое является конечным подмножеством некоторого фиксированного счетного множества, $\varphi : Q \times E_k \to Q$ — функция переходов, $\psi : Q \times E_k \to E_k$ — функция выходов, q_0 — начальное состояние.

Если на вход инициальному автомату V подается слово или сверхслово $x = x(1)x(2)\ldots$, на выходе получается слово или сверхслово $y = y(1)y(2)\ldots$, и $q(t)$ означает состояние автомата в момент времени t, то функционирование автомата задается системой уравнений

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi\big(q(t), x(t)\big), \\ y(t) = \psi\big(q(t), x(t)\big), \end{cases}$$

где $t = 1, 2, \ldots$.

Функции φ и ψ естественно расширяются на $Q \times E_k^*$, а именно, если $\alpha \in E_k^*$, $a \in E_k$, то индуктивно определим

$$\varphi(q, \alpha a) = \varphi(\varphi(q, \alpha), a),$$

$$\psi(q, \alpha a) = \psi(\varphi(q, \alpha), a).$$

Введем также обозначения

$$\overline{\varphi}(q, \alpha) = \varphi(q, \alpha]_1)\varphi(q, \alpha]_2)\ldots\varphi(q, \alpha),$$
$$\overline{\psi}(q, \alpha) = \psi(q, \alpha]_1)\psi(q, \alpha]_2)\ldots\psi(q, \alpha),$$

если α — слово, если же α — сверхслово, то

$$\overline{\varphi}(q,\alpha) = \varphi(q,\alpha]_1)\varphi(q,\alpha]_2)\ldots\varphi(q,\alpha]_n)\ldots,$$
$$\overline{\psi}(q,\alpha) = \psi(q,\alpha]_1)\psi(q,\alpha]_2)\ldots\psi(q,\alpha]_n)\ldots.$$

Если α — сверхслово в алфавите A, то *пределом* сверхслова α назовем такое множество $A' \subseteq A$, что в сверхслове α бесконечное число раз встречаются символы из A' и только они. Этот факт будем обозначать $A' = \lim \alpha$.

Сверхсобытие R *представимо* автоматом $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$ с помощью семейства F, $F \subseteq 2^Q$, тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in R$, существует $Q' \in F$, такое, что $\lim \overline{\varphi}(q_0,\alpha) = Q'$.

Скажем, что символ $\alpha(t+1)$ сверхслова $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(t+1)\ldots$ *угадан* автоматом $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, если $\psi(q_0, \alpha]_t) = \alpha(t+1)$, $t = 1, 2, \ldots$

Пусть $\alpha \in E_k^\infty$, обозначим $\sigma_\alpha = \underline{\lim}_{n\to\infty} N/n$, где N — количество угаданных автоматом V символов в сверхслове $\alpha\,\underset{n}{]}$. Будем говорить, что σ_α — *степень прогнозирования* сверхслова α автоматом V.

Считаем, что множество слов *частично прогнозируемо*, если существует такой автомат, что степень прогнозирования для каждого сверхслова множества строго больше нуля.

Если для состояний $q', q'' \in Q$ найдется такое слово α из E_k^*, что $\varphi(q',\alpha) = q''$, то говорят, что состояние q'' *достижимо* из состояния q'. Считается, что любое состояние достижимо из себя по крайней мере по пустому слову.

В дальнейшем будем считать, что для инициальных автоматов, все состояния автомата достижимы из начального состояния, поскольку если выбросить недостижимые состояния, то выходная функция автомата не изменится.

Сильно связным множеством назовем такое множество состояний C, $C \subseteq Q$, автомата $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q_0)$, что для любых $q', q'' \in C$ найдется такое слово α из E_k^*, что $\varphi(q',\alpha) = q''$ и $\overline{\varphi}(q',\alpha) \in C^*$, то есть по слову α автомат переходит из состояний q' в состояние q'', проходя только состояния из C. Множество, состоящее из одного состояния, по определению считается сильно связным.

Любое сильно связное множество состояний C назовем *автоматным циклом*, если $|C| > 1$. Одноэлементное множество состояний $C = \{q\}$ является *автоматным циклом* только если существует символ a из E_k, что $\varphi(q, a) = q$. *Длиной автоматного цикла* назовем число состояний в автоматном цикле.

Тем самым сильно связное множество отличается от автоматного цикла только тем, что множество, состоящее из одного состояния, у которого нет перехода в себя по какому-либо символу (то есть нет петли), не является автоматным циклом.

Отметим, что если сверхсобытие R представимо автоматом V с помощью семейства F, то любое Q' из F — сильно связное, более того автоматный цикл.

Состоянием выхода для автоматного цикла C назовем такое состояние $q \in C$, что существует единственное a, $a \in E_k$, такое, что $\varphi(q, a) \in C$.

Компонентами автоматного цикла C относительно состояния выхода q, назовем максимальные по включению сильно связные подмножества множества $C \setminus \{q\}$.

Будем говорить, что автоматный цикл C удовлетворяет *требованиям частичной прогнозируемости*, если у него и любого его подцикла существует хотя бы одно состояние выхода. Далее будем считать, что циклы удовлетворяют требованию частичной прогнозируемости.

Определим некоторый способ задания выходов, то есть способ описания выходной функции $\psi : Q \times E_k \to E_k$. Если посмотреть на диаграмму Мура автомата, то задать выходы значит: в каждом состоянии отметить одну выходящую стрелку. Отмечать стрелки будем следующим образом: если $\psi(q, a) = b$, то будем отмечать ребро с выходом b, выходящее из $\varphi(q, a)$. Можно считать наоборот: если у нас отмечено ребро с выходом b, исходящее из некоторого состояния q', то для всех q и a, таких что $\varphi(q, a) = q'$, присваиваем значение выходной функции $\psi(q, a) = b$.

Заметим, что угадывание происходит, когда выход в предыдущий момент времени равен входу в данный момент времени. Поэтому если автомат проходит по отмеченной стрелке, то угадывание происходит.

Если q является состоянием выхода некоторого автоматного цикла C, то единственное ребро, исходящее из q и ведущее в состояние из C, назовем *ребром возврата*.

Пусть $V = (E_k, Q, E_k, \varphi, \psi, q)$ — автомат, функция выхода ψ еще не задана. Пронумеруем состояния автомата. Пусть C — некоторый автоматный цикл автомата V, который удовтлетворяет требованиям частичной прогнозируемости. Определим некоторый алгоритм разметки ребер, исходящих из состояний цикла C. Этот алгоритм для каждого состояния из C будет отмечать одно ребро, исходящее из этого состояния, и тем самым частично определять выходную функцию ψ. Обозначим этот алгоритм разметки через $\mathbb{A}$ и определим его следующим образом.

1) Возьмем q_0 — состояние выхода цикла C с минимальным номером, и отметим ребро возврата, исходящее из q_0.
2) Оставшиеся состояния цикла C разобьем на компоненты $K_1, \ldots, K_m$ относительно q_0.
3) Для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, m$, если K_i — автоматный цикл, то применим к нему рекурсивно алгоритм разметки $\mathbb{A}$, если же K_i состоит из одного состояния, в котором все стрелки ведут из него (то есть нет петли), то отметим ребро, исходящее из этого состояния и ведущее в состояние из C с минимальным номером.

Назовем разметку *оптимальной* для автоматного цикла C, если степень угадывания в данном цикле максимальна при данной разметке.

Путем в автоматном цикле назовем такое упорядоченное множество состояний $\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, что для любого $i, i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, существует $a \in E_k$ такое, что $\varphi(q_i, a) = q_{i+1}$, а для $i = n$ существует $b \in E_k$ такое, что $\varphi(q_n, b) = q_0$. Обозначать путь будем $(q_0, q_1, \ldots, q_n)^\infty$. Любому пути соотвествует сверхслово, но не наоборот. Заметим, что какое-нибудь слово с наименьшей степенью угадывания для конкретного автоматного цикла всегда задается путем.

Теорема 1. *Если применить алгоритм $\mathbb{A}$ к произвольному автоматному циклу C, который удовлетворяет требованиям частичной прогнозируемости, то, правильно задавая порядок состояний выхода на каждом шаге и порядок ребер в компонентах единичной длины, можно получить оптимальную разметку.*

Доказательство. Пусть автоматный цикл C удовлетворяет условиям частичной прогнозируемости. Пусть $\mathcal{B}$ — оптимальная разметка цикла C. Построим разметку $\mathcal{B}$ по алгоритму $\mathbb{A}$, делая правильный выбор на каждом шаге.

В автоматном цикле C в каждом автоматном подцикле есть хотя бы одно состояние выхода. Разметка $\mathcal{B}$ — оптимальная, следовательно, в цикле C и в каждом подцикле цикла C отмечено ребро возврата хотя бы в каком-то состоянии выхода, иначе можно будет построить неугадываемое слово, и разметка не будет оптимальной. Пусть H — множество этих состояний выходов.

Теперь применим алгоритм $\mathbb{A}$ к циклу C, за исходное состояние выхода примем состояние q, которое лежит в H. Далее, следуя алгоритму, разобьем оставшиеся состояния цикла C на компоненты относительно q, получим ряд автоматных циклов, к которым нужно рекурсивно применить алгоритм $\mathbb{A}$. За исходные состояния выходов для этих циклов возьмем те, которые лежат в H и так далее. Если на каком то шаге появилась компонента с одним состоянием, скажем, что состоянием с минимальным номером будет то, которое было отмечено в оптимальной разметке, отметим его по алгоритму. Тем самым получим оптимальную разметку, используя алгоритм $\mathbb{A}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого числа m существует автоматный цикл C такой, что степень угадывания для разметки цикла C по алгоритму $\mathbb{A}$ отличается от оптимальной в k раз, где $k > m$.*

Доказательство. Будем строить такую последовательность автоматных циклов $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$, что отношение степеней угадывания, полученных при разметках по алгоритмам $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, где алгоритм $\mathbb{B}$ определим позднее, увеличивается.

Рассмотрим автоматный цикл C_0 с начальным состоянием q_0 (рис. 1) и зафиксируем порядок состояний $\{q_0, q_1, q_2, b_0, b_1\}$.

Отметим переходы в соответсвии с алгоритмом $\mathbb{A}$ (на рис. 1 пунктирные стрелки) и посчитаем степень частичного угадывания в худшем случае. Очевидно, худшим будет путь $(q_0, b_0, b_1, q_2)^\infty$ и степень угадывания будет равна $\frac{1}{4}$. Обозначим $z_0 = 4$.

Теперь рассмотрим тот же цикл C_0, но изменим, отмеченную в состоянии q_0, стрелку с 2 на 0 (точечная стрелка на рис. 1). Посчитаем степень угадывания в худшем случае, получим путь $(q_0, q_1, q_2)^\infty$ и степень равную $\frac{1}{3}$. Обозначим $x_0 = 1, y_0 = 3$.

Опишем алгоритм построения всех остальных C_i:

1) Возьмем автоматный цикл C_0, подставим вместо b_0 и b_1 автоматные циклы C_{i-1}, полученные множества состояний обозначим $C_{i-1}^{b_0}$ и $C_{i-1}^{b_1}$, а их состояния обозначим также как и в C_{i-1}, только с верхними индексами b_0 и b_1.
2) Стрелки, ведущие в b_0 в цикле C_0, направим в состояние $q_0^{b_0}$. Стрелки, выходящие из $C_{i-1}^{b_0}$, направим в состояние $q_0^{b_1}$, а стрелки, выходящие из $C_{i-1}^{b_1}$, направим в состояние q_2.

У каждого C_i существует ровно одно состояние выхода — q_2, а подциклы $C_{i-1}^{b_0}$ и $C_{i-1}^{b_1}$ представляют собой компоненты C_i относительно состояния q_2. Отсюда следует, что разметка по алгоритму $\mathbb{A}$ циклов $C_{i-1}^{b_0}$, $C_{i-1}^{b_1}$ и C_{i-1} совпадает.

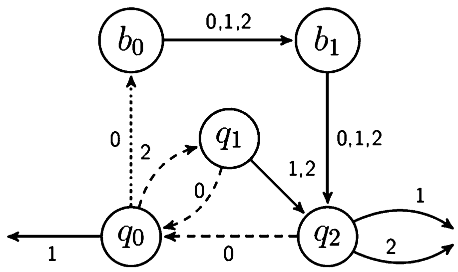

Рис. 1. Автоматный цикл C_0.

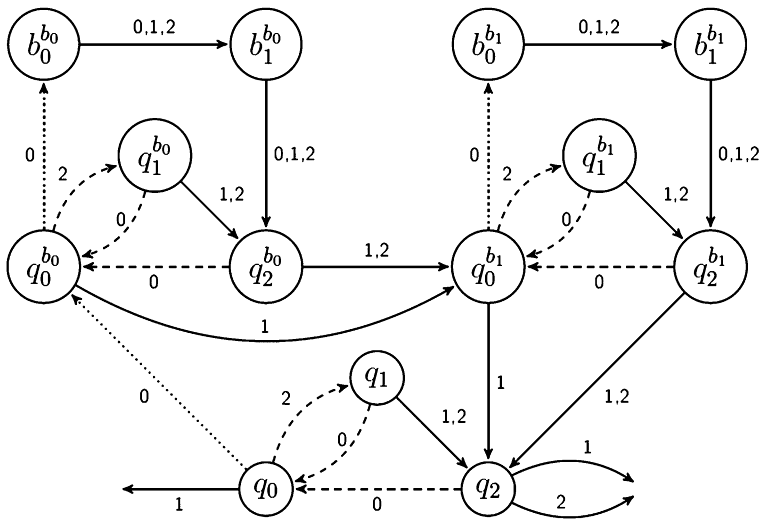

Рис. 2. Автоматный цикл C_1.

Разметкой по алгоритму $\mathbb{B}$ назовем разметку, у которой в состояниях q_0 с любыми верхними индексами отмечена стрелка 0 вместо 2, а разметка в других состояниях совпадает с разметкой по алгоритму $\mathbb{A}$.

Рассмотрим подробнее автоматный цикл C_1 (рис. 2). На рисунке 2 прерывистыми стрелками показана разметка по алгоритму $\mathbb{A}$, а точечными стрелками показаны места, где разметка по алгоритму $\mathbb{A}$ отличается от разметки по алгоритму $\mathbb{B}$. Посчитаем степень угадывания в худшем случае с разметкой по алгоритму $\mathbb{A}$ и получим $\frac{1}{10}$. Обозначим $z_1 = 10$ — длина периода худшего пути по алгоритму $\mathbb{A}$. И посчитаем с разметкой по алгоритму $\mathbb{B}$, получим $\frac{2}{8}$. Обозначим $y_1 = 8$ — длина периода худшего пути по алгоритму $\mathbb{B}$, $x_1 = 2$ — число угадываний за один период худшего пути.

Заметим, что степень угадывания на i-ом шаге для худшего случая с разметкой по алгоритму $\mathbb{A}$ получается по формуле $\frac{1}{2z_{i-1}+2}$. Так как в худшем случае будет ровно 1 угадывание в состоянии q_2, а всего мы пройдем один период худшего пути в $C^{b_0}_{i-1}$, один период худшего пути в $C^{b_1}_{i-1}$, шаг из $C^{b_1}_{i-1}$ в q_2 и шаг из q_0 в $C^{b_0}_{i-1}$.

Соотвественно, степень угадывания на i-ом шаге для худшего случая с разметкой по алгоритму $\mathbb{B}$ получается по формуле $\frac{2x_{i-1}}{2y_{i-1}+2}$. Знаменатель такой, потому что всего мы пройдем один период худшего пути в $C^{b_0}_{i-1}$, один период худшего пути в $C^{b_1}_{i-1}$, шаг из q_0 в $C^{b_0}_{i-1}$ и шаг из $C^{b_1}_{i-1}$ в q_2. Числитель же равен $2x_{i-1}$, потому что всего угадываний будет столько, сколько было в $C^{b_0}_{i-1}$ и в $C^{b_1}_{i-1}$ минус 2 угадывания в состояниях $q^{b_0}_2$ и $q^{b_1}_2$ и плюс два в состояниях q_0 и q_2.

На каждом шаге i разница степеней угадывания по алгоритмам $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ задается отношением $\frac{x_i z_i}{y_i}$. Если мы докажем, что с каждым шагом эта разница возрастает, то теорема будет доказана.

$$\begin{aligned} \frac{x_i z_i}{y_i} \quad &? \quad \frac{2x_i(2z_i+2)}{2y_i+2}, \\ \frac{z_i}{y_i} \quad &< \quad \frac{2(z_i+1)}{(y_i+1)}. \end{aligned}$$

Таким образом отношение между степенями угадывания по алгоритмам $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ увеличивается с каждым шагом, а значит для любого числа m, найдется такой шаг j, что на автоматном цикле C_j степени угадывания для разметок по алгоритмам $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ будут отличаться в $k > m$ раз. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору Э. Э. Гасанову и доценту А. А. Мастихиной за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

[1] Вереникин А. Г., Гасанов Э. Э. Об автоматной детерминизации множеств сверхслов // Дискретная математика. — 2006. — Т. 18, вып. 2. — С. 84–97.

[2] Мастихина А. А. О частичном угадывании сверхслов // Интеллектуальные системы. — 2007. — Т. 11, вып. 1–4. — С. 561–572.

[3] Мастихина А. А. Критерий частичного предвосхищения общерегулярных сверхсобытий // Дискретная математика. — 2011. — Т. 23, вып. 4 — С. 103–114.

[4] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[5] Гасанов Э. Э., Мастихина А. А. Прогнозирование общерегулярных сверхсобытий автоматами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 127–154.

[6] Гасанов Э. Э. Прогнозирование периодических сверхсобытий автоматами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 23–34.