Некоторые свойства изображений, составляющих части плоской среды

В. Н. Козлов (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

В работе рассмотрен подход к распознаванию визуальных образов, основывающийся на построении кодов изображений, инвариантных относительно геометрических преобразований.

Ключевые слова: распознавание визуальных образов, кодирование изображений.

Распознавание обычно понимается так, что есть некоторый набор классов объектов и есть неизвестный объект x. Его нужно отнести (приписать) одному из этих классов. Классы интерпретируются как образы, отнесение x к одному из классов — распознавание образов.

Вопрос о том, откуда взялись классы, рассматривается обычно как отдельный и второго плана. Как правило, полагают, что уже есть некое «неструктурированное» множество всех возможных объектов и ставится задача лишь разбить его на классы. При этом вопрос о том, откуда взялись объекты, составляющие неструктурированное множество — вопрос третьего плана.

Интересно, однако, рассмотреть задачу, в рамках которой объекты встроены в некоторую объемлющую среду, явным образом не выделены, могут «непрерывно» переходить друг в друга и иметь общие части. Кроме того, как объекты могут рассматриваться и совокупности объектов, и среда в целом.

Объектами будут изображения, классами объектов — классы изображений, и, тем самым, распознавание здесь — это распознавание визуальных (зрительных) образов.

Под изображением понимается конечное (непустое) множество точек на плоскости. Содержательным обоснованием этому может служить то, что любое реальное (не цветное) изображение можно аппроксимировать изображением из точек, причем в нужной мере можно передать все градации «серого» цвета разной плотностью точек в разных частях изображения. Такое представление не закрывает дорогу и к рассмотрению цветных изображений, поскольку, как известно, цветное изображение можно представить тремя не цветными. Наконец, все, что мы видим, мы видим посредством глаз. Изображение из среды проецируется на сетчатку глаз, что приводит к возбуждению части рецепторных клеток, то есть, в конечном счете, к формированию на сетчатке аналога составленного из точек изображения.

Здесь представлена часть работы, относящаяся к кодированию изображений.

Кодом изображения A называем пару $\langle M_A, T_A \rangle$. Здесь M_A — множество номеров точек изображения, T_A — множество всех чисел вида $\rho_{mnu,ksp} = S_{mnu}/S_{ksp}$, где S_{mnu} и S_{ksp} — площади треугольников в вершинах с точками соответственно m, n, u и k, s, p. При $S_{ksp} = 0$ полагаем $\rho_{mnu,ksp}$ неопределенным. Изображения A и B с кодами $\langle M_A, T_A \rangle$ и $\langle M_B, T_B \rangle$ называем эквивалентными, если существует такая биекция $\psi : M_A \to M_B$, что $\rho_{mnu,ksp} = \rho_{\psi(m)\psi(n)\psi(u),\psi(k)\psi(s)\psi(p)}$. Если все точки изображения не лежат на одной прямой или двух параллельных прямых, то изображение называем плоским.

Теорема 1. [2] *Два плоских изображения эквивалентны тогда и только тогда, когда они аффинно эквивалентны.*

Содержательно теорема 1 означает, в частности, что код изображения задает его с точностью до аффинных преобразований.

Пусть B есть часть изображения A. Если код для A есть $\langle M_A, T_A \rangle$, то, очевидно, код $\langle M_B, T_B \rangle$ можно получить, если собрать в M_B номера из M_A всех точек, вошедших в B, и собрав в T_B все те $\rho_{mnu,ksp}$ из T_A, для которых m, n, u, k, s, p вошли в M_B. Говорим в этом случае, что код $\langle M_B, T_B \rangle$ есть часть кода $\langle M_A, T_A \rangle$.

Известно, что для построения изображения A по коду $\langle M_A, T_A \rangle$ достаточно таких элементов $\rho_{mnu,ksp}$ из T_A, у которых тройки mnu и ksp разнятся только одним номером. Возникает вопрос: какова может быть роль других элементов $\rho_{mnu,ksp}$ в коде?

Назовем изображения A и B эквидистантными, если существует такая биекция $\psi : M_A \to M_B$, при которой для любых точек с номерами m, n, u из M_A (не лежащих на одной прямой), число $\rho_{mnu,\psi(m)\psi(n)\psi(u)}$ есть константа, не зависящая от выбора точек m, n, u.

Название «эквидистантные изображения» объясняется следующей аналогией с более простым случаем. Пусть A и B есть изображения, совместимые параллельным переносом. Тогда, очевидно, существует биекция $\psi : M_A \to M_B$ такая, что все расстояния $r(a, \psi(a))$ между соответствующими точками двух изображений есть константа. Отрезки

$r(a, \psi(a))$ для всех a из M_A в этом случае не только равны, но и параллельны. Очевидно, имеет место и обратное: если все эти отрезки равны и параллельны, то A и B совместимы параллельным переносом.

Теорема 2. *Два плоских изображения эквидистантны тогда и только тогда, когда они аффинно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть A и B аффинно эквивалентны. Тогда существует такая биекция $\psi : M_A \to M_B$, что B переводится в B', совмещенное с A, то есть при этом каждая точка a из A совмещена с точкой $\psi(a)$. Ясно, что при этом для каждой тройки m, n, u из A (не лежащих на одной прямой) и соответствующей тройки k', s', p' из B' (здесь $k' = \psi(m)$, $s' = \psi(n)$, $p' = \psi(u)$) имеем $\rho_{mnu,k's'p'} = S_{mnu}/S_{k's'p'} = q$. Вернем теперь обратным преобразованием B' в B. При этом площадь каждого треугольника с вершинами $k's'p'$ из B' при переводе в треугольник ksp с вершинами из B умножится на одну и ту же для всех треугольников величину q. Следовательно $\rho_{mnu,ksp} = S_{mnu}/S_{ksp} = S_{mnu}/(qS_{k's'p'}) = 1/q$.

Пусть теперь A и B эквидистантны. Если B' получено из B аффинным преобразованием, то нетрудно видеть, A и B' тоже эквидистантны. Выберем некоторые три точки (не на одной прямой) m, n, u на A, и пусть преобразованное B' таково, что его точки k', s', p', соответствующие точкам m, n, u, совпали с ними, то есть площади треугольников mnu и $k's'p'$ равны. Но тогда, с учетом эквидистантности, должны быть равны площади и всех остальных соответствующих друг другу треугольников из A и B'. Однако это значит, что коды $\langle M_A, T_A \rangle$ и $\langle M_{B'}, T_{B'} \rangle$ эквивалентны, и, значит, в силу теоремы 1, изображения A и B' аффинно эквивалентны. Но тогда аффинно эквивалентны и изображения A и B. Теорема доказана.

Итак, прояснена роль элементов $\rho_{mnu,ksp}$ кода с полностью различными тройками mnu и ksp. Роль элементов с двумя различиями в этих тройках пока не ясна.

Список литературы

[1] Крушинский Л. В., Кудрявцев В. Б., Козлов В. Н. О некоторых результатах применения математики к моделированию в биологии // Математические вопросы кибернетики. — 1988. — Т. 1. — С. 52–88.

[2] Козлов В. Н. Введение в математическую теорию зрительного восприятия. — М.: Изд-во Центра прикл. иссл. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2007.