О взаимосвязи между различными подходами к анализу нечётких формальных понятий

В. В. Панкратьева (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва)

Изучается взаимосвязь между обобщениями формальных понятий на случай нечётких контекстов. Рассматриваются чётко-порождённые нечёткие формальные понятия (Р. Белохлавек с соавторами), протонечёткие понятия (О. Кридло и С. Крайчи), узорные структуры (С. Кузнецов и Б. Гантер). Устанавливаемые соответствия между протонечёткими и чётко-порождёнными формальными понятиями позволяют переформулировать задачи и использовать полученные ранее критерии и свойства.

Ключевые слова: нечёткие формальные понятия, протонечёткие формальные понятия, чётко-порождённые формальные понятия, интервальные формальные понятия.

1. Введение

В данной работе изучается взаимосвязь между различными обобщениями анализа формальных понятий [1] на случай нечётких контекстов. Рассматривается подход Р. Белохлавека с соавторами [2], при котором основное внимание уделяется так называемым чётко-порождённым нечётким формальным понятиям, подход О. Кридло и С. Крайчи [3], состоящий в изучении протонечётких понятий, то есть формальных понятий на каждом "уровне" степени истинности нечёткого контекста, а также введённые С. Кузнецовым и Б. Гантером [4] узорные структуры, частным случаем которых является анализ формальных понятий с операцией интервального пересечения (слияния).

Устанавливаемые в работе соответствия между протонечёткими и чётко-порожденными формальными понятиями для одного и того же нечёткого контекста позволяют переформулировать задачи с одного языка на другой и использовать полученные ранее критерии и свойства.

2. Основные определения и обозначения

Нечётким подмножеством A в множестве X называется отображение, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ степень истинности $A(x) \in L$ включения x в A; здесь L — некоторое частично упорядоченное множество. *Полной решёткой* называется частично упорядоченное множество L, в котором у любого подмножества $M \subseteq L$ есть точная нижняя ($\bigwedge M$) и верхняя ($\bigvee M$) границы. Для множеств из двух элементов используют обозначения $x \wedge y = \bigwedge\{x, y\}$, $x \vee y = \bigvee\{x, y\}$. *Полной решёткой с делением* называется набор $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ такой, что

(1) $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ является полной решёткой с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1;

(2) $\langle L, \otimes, 1\rangle$ образует коммутативный моноид;

(3) *нечёткая конъюнкция* $\otimes$ и *нечёткая импликация* $\to$ удовлетворяют условию $\quad x \otimes y \leqslant z \iff x \leqslant y \to z$.

В настоящей работе используются операции Лукасевича:

$$a \otimes b = \max\{a + b - 1, 0\}, \qquad a \to b = \min\{1 - a + b, 1\}.$$

Множество всех нечётких множеств в X обозначается L^X. Под 1-срезом множества $A \in L^X$ понимается чёткое множество
${}^1A = \{x \in X \mid A(x) = 1\}$.

Пусть X и Y — множества объектов и признаков, и I — нечёткое отношение между X и Y. Тройка $\langle X, Y, I\rangle$ называется *формальным нечётким контекстом.*

В работе [2] для нечётких множеств $A \in L^X$ и $B \in L^Y$ определяются нечёткие множества $A^{\uparrow} \in L^Y$ и $B^{\downarrow} \in L^X$ формулами

$$A^{\uparrow}(y) = \bigwedge_{x \in X}(A(x) \to I(x, y)), \qquad B^{\downarrow}(x) = \bigwedge_{y \in Y}(B(y) \to I(x, y)).$$

Положим $\mathcal{B}(X, Y, I) = \{\langle A, B\rangle \mid A^{\uparrow} = B, B^{\downarrow} = A\}$. Элементы множества $\mathcal{B}(X, Y, I)$ называются *формальными понятиями* контекста $\langle X, Y, I\rangle$.

Формальное нечёткое понятие $\langle A, B\rangle \in \mathcal{B}(X, Y, I)$ является чётко-порожденным [2] если существует чёткое множество $B_c \subseteq Y$ такое, что $A = B_c^{\downarrow}$ (таким образом, $B = B_c^{\downarrow\uparrow}$). Через $\mathcal{B}_c(X, Y, I)$ обозначим совокупность всех чётко-порожденных формальных понятий в $\langle X, Y, I\rangle$.

В работе [3] для каждого $l \in L$ определяются отображения $\uparrow_l \colon 2^X \to 2^Y$ и $\downarrow_l \colon 2^Y \to 2^X$:

для $A \subseteq X$ положим $\uparrow_l (A) = \{y \in Y \colon (\forall x \in A) I(x,y) \geqslant l\}$;

для $B \subseteq Y$ положим $\downarrow_l (B) = \{x \in X \colon (\forall y \in B) I(x,y) \geqslant l\}$;

Пара $\langle A, B\rangle$ называется l-понятием если и только если $\uparrow_l (A) = B$ и $\downarrow_l (B) = A$, то есть пара $\langle A, B\rangle$ является понятием в чётком контексте $\langle X, Y, I_l\rangle$, где

$$I_l = \{(x, y) \in X \times Y \colon I(x, y) \geqslant l\}.$$

Контекст $\langle X, Y, I_l\rangle$ называется l-срезом. Множество всех понятий в l-срезе будем обозначать через $\mathcal{K}_l$.

Тройки $\langle A, B, l\rangle \in 2^X \times 2^Y \times L$ такие, что $\langle A, B\rangle \in \bigcup\limits_{k \in L} \mathcal{K}_k$ и $l = \sup\{k \in L \colon \langle A, B\rangle \in \mathcal{K}_k\}$ называются протонечёткими понятиями. Множество всех протонечётких понятий обозначается символом $\mathcal{K}^P$.

Пусть $A \subseteq X$ — произвольное множество объектов. Множество

$$\mathcal{K}^P_A = \{\langle B, l\rangle \in 2^Y \times L \colon (\exists A' \supseteq A)\langle A', B, l\rangle \in \mathcal{K}^P\}$$

назовем сужением множества протонечётких понятий на A.

Определим отображения

$$\Uparrow \colon 2^X \to L^Y, \qquad \Downarrow \colon L^Y \to 2^X$$

следующим образом: для любого подмножества A объектов и для любого подмножества B признаков положим

$$\Uparrow (A)(y) = \sup\{l \in L \colon (\exists \langle B, l\rangle \in \mathcal{K}^P_A), y \in B\};$$
$$\Downarrow (\tilde{B}) = \bigcup \{A \subseteq X \colon (\forall y \in Y)(\exists \langle B, l\rangle \in \mathcal{K}^P_A\ y \in B\ \&\ l \geqslant \tilde{B}(y)\}.$$

Пусть G — некоторое множество, $(D, \sqcap)$ — полурешётка с инфимумом. Частным случаем решётки $(D, \sqcap)$, называемой решёткой описаний, является множество наборов вещественных чисел. Совокупность таких наборов для всех объектов определяет нечёткий контекст.

3. Связь между различными подходами

Рассмотрим нечёткий контекст $\langle X, Y, I\rangle$, содержащий k объектов и n признаков (то есть $|X| = k$, $|Y| = n$):

Связь между понятиями, введенными в работах [2] и [3], отражена в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Отображение $\Downarrow$ совпадает с ограничением на чёткие подмножества признаков отображения $\downarrow$.*

Теорема 2. *В чётком контексте $\langle X, Y, I\rangle$ множество B_c порождает все формальные понятия из 1-среза контекста $\langle X, Y, I\rangle$.*

Теорема 3. *Пусть $A = (a_1, \ldots, a_k) = B_c^{\downarrow}$, $B = B_c^{\downarrow\uparrow}$. Обозначим $l = \bigvee B_c^{\downarrow} = \bigvee a_i$. Построим множество $Z = (z_1, \ldots, z_k)$ такое, что $z_i = 0$ если $a_i < l$ и 1 если $a_i = l$. Тогда $(z_1, z_2, \ldots, z_k) \times {}^1B$ соответствует протонечёткому понятию в l-срезе, которое можно ограничить на ${}^1B$.*

Теорема 4. *Пусть $A = (a_1, \ldots, a_k) = B_c^{\downarrow}$, $B = B_c^{\downarrow\uparrow}$. Зададим множество (кортеж) Z формулой*

$$z_j = \begin{cases} 1, & a_j \geqslant a_i, \\ 0, & a_j < a_i. \end{cases}$$

Тогда контекст $Z \times {}^1Y$ соответствует протонечёткому понятию в a_i-срезе исходного контекста, которое можно ограничить на ${}^1Y$.

Следствие 1. *По B_c, полностью состоящему из единиц, можно построить протонечёткое понятие, содержащее все признаки исходного контекста.*

Теорема 5. *Пусть в срезе l имеется некоторое протонечёткое формальное понятие. Тогда можно построить кортеж B_c, удовлетворяющий следующим условиям:*

1. $B_c^{\downarrow} = (a_1, \ldots, a_k)$, где $a_i \geqslant l$, если i-й объект содержится в данном протонечётком понятии, и $a_i < l$, иначе;

2. B_c — замкнутый по чётким компонентам (или просто чётко-замкнутый) кортеж, то есть ${}^1B_c^{\downarrow\uparrow} = B_c$.

Далее исследуется связь между понятиями, введенными в работах [2] и [4].

Если в нечётком контексте I какая-то строка покоординатно мажорируется другой строкой, то имеет место *импликация объектов* (из меньшего в больший).

Теорема 6. *Если объёмы интервальных формальных понятий совпадают с чётко-замкнутыми кортежами, то контекст не содержит импликаций.*

Теорема 7. *Для любого чётко-замкнутого кортежа соответствующее ему подмножество объектов является замкнутым.*

Теорема 8. *Для того, чтобы множество чётко-замкнутых кортежей совпадало с множеством объёмов интервальных формальных понятий, необходимо, чтобы для каждого интервального формального понятия было выполнено следующее условие: ни одна строка, не входящая в объем интервального формального понятия, не мажорирует минимум интервалов.*

4. Описание решёток нечётких формальных понятий

Введём величину α — количество уровней нечёткости. В случае квадратного контекста размера $n \times n$ существует α^n различных кортежей для объёма (или содержания). Количество нечётких формальных понятий равняется количеству замкнутых кортежей. Можно показать, что существует нечёткий контекст, в котором все кортежи объёма (или содержания) замкнуты, то есть решетка формальных понятий состоит из α^n элементов. Такой контекст называется *максимальным нечётким контекстом.* Соответствующая решётка обозначается L_0.

Согласно основной теореме о решётках формальных понятий для L_0 также можно построить чёткий контекст, размерность которого в $\alpha - 1$ раз больше размерности нечёткого контекста.

Для произвольного нечёткого контекста размерности $n \times n$ верна следующая теорема.

Теорема 9. *Решётка формальных понятий произвольного нечёткого контекста является нижней подполурешёткой решётки L_0.*

Для нечёткого контекста размера 2×2 описаны все решётки формальных понятий, которые могут ему соответствовать. В частности, можно показать, что не по каждой решётке (нижней подполурешётке решётки L_0) можно восстановить нечёткий контекст 2×2.

Список литературы

[1] Ganter B., Wille R. Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations. — Berlin: Springer, 1999.

[2] Bělohlávek R., Sklenář V., Zacpal J. Crisply Generated Fuzzy Concepts // in: B. Ganter and R. Godin (Eds.): ICFCA 2005, LNCS 3403. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. — P. 268–283.

[3] Krídlo O., Krajči S. Proto-fuzzy Concepts, their Retrieval and Usage // in: B. Ganter and R. Godin (Eds.): CLA 2008. — Olomouc: Palacký University, 2008. — P. 83–95. — ISBN 978-80-244-2111-7.

[4] Ganter B., Kuznetsov S. O. Pattern Structures and Their Projections // preprint MATH-AL-14-2000. — Technische Universität Dresden, Herausgeber, Der Rektor, November 2000.

[5] Pankratieva V. V., Kuznetsov S. O. Relations between Proto-Fuzzy Concepts, Crisply Generated Fuzzy Concepts and Pattern Structures // Fundamenta Informaticae. — 2012. — Vol. 115, Iss. 4. — P. 265–277.