Класс автоматов с суперпозициями, не расширяющийся до предполного

Д. Н. Бабин (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

Для суперпозиции строится пример, не расширяющегося до предполного класса, множества автоматов.

Ключевые слова: автомат, суперпозиция, предполный класс.

Введение

Известно, что решение задач полноты и выразимости для систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности [1]. Так в работе [2] установлена континуальность множества предполных классов для систем автоматных функций, а в работе [3] установлена алгоритмическая неразрешимость задачи полноты относительно суперпозиции и обратной связи для конечных систем автоматных функций. При этом в классе автоматов с операцией суперпозиции имеет место неполнота любой конечной системы автоматов [1], а система, состоящая из автоматов с двумя входами образуют полную систему [4]. Оставался открытым вопрос о расширяемости замкнутых классов до предполных. В этой статье автор предъявил замкнутый класс автоматов, не расширяющийся до предполного класса.

Другие результаты по задаче выразимости автоматов относительно сурперпозиции содержатся в работах [9, 10, 11]. Общий обзор результатов в теории автоматов дан в работе [12].

Основные определения и результаты

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, $\mathbf{P_2}$ — множество булевых функций вида

$$g : E_2^n \to E_2.$$

Пусть E_2^∞ — множество всех сверхслов из нулей и единиц

$$a(1)a(2)\ldots,$$

где $a(j) \in E_2$, $j = 1, 2, \ldots$.

Функция вида

$$f : (E_2^\infty)^n \to (E_2^\infty)^m$$

называется *автоматной функцией (a-функцией)*, она задается рекуррентно соотношениями

$$\begin{cases} q_1(1) = q0_1, \\ \ldots \\ q_s(1) = q0_s \\ q_1(t+1) = \varphi_1(q_1(t), \ldots, q_s(t), a_1, \ldots, a_n), \\ \ldots \\ q_s(t+1) = \varphi_s(q_1(t), \ldots, q_s(t), a_1, \ldots, a_n) \\ b_1(t) = \psi_1(q_1(t), \ldots, q_s(t), a_1, \ldots, a_n) \\ \ldots \\ b_m(t) = \psi_m(q_1(t), \ldots, q_s(t), a_1, \ldots, a_n) \end{cases}$$

Вектор $q = (q_1, \ldots, q_s)$ задает *состояние* a-функции f, $q0$ — её *начальное состояние*, буквы

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ и } b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

называются *входной и выходной буквами*, а сверхслова

$$a(1)a(2)\ldots, \qquad b(1)b(2)\ldots \text{ —}$$

входными и выходными сверхсловами, соответственно.

Вектор-функции φ и ψ называются функциями *переходов и выходной* функцией, соответственно, а шестерка

$$(E_2^n, E_2^s, E_2^m, \varphi, \psi, q_0) \text{ —}$$

автоматом, порождающим функцию f. Будем считать, что все состояния автомата достижимы из начального. Мы будем использовать для автомата обозначение

$$\mathsf{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0),$$

при этом предполагая что $A \subseteq E_2^n, Q \subseteq E_2^s, B \subseteq E_2^m$.

Класс всех a-функций обозначим через $\mathbf{P}$. В этом классе обычным образом вводятся операции суперпозиции автоматных функций. Для суперпозиции используются модификации операций из [5].

$$\begin{cases} (\eta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1), \\ (\varepsilon f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n) \\ (\varpi f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_3, \ldots, x_n) \\ (\delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \\ (f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) \end{cases}$$

Автоматы, имеющие одинаковые автоматные функции, называются эквивалентными. Автоматы

$$\mathsf{A}_1 = \left(A_1, Q_1, B_1, \varphi_1, \psi_1, {q_0}^1\right),$$
$$\mathsf{A}_2 = \left(A_2, Q_2, B_2, \varphi_2, \psi_2, {q_0}^2\right)$$

называются изоморфными, если они получаются взаимно-однозначным переименованием входного, выходного алфавитов и множества состояний δ, λ, τ соответственно, $\tau({q_0}^1) = {q_0}^2$, то есть диаграммы коммутативны

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 : Q_1 \times A_1 \longrightarrow Q_1 & \qquad & \psi_1 : Q_1 \times A_1 \longrightarrow B_1 \\ \quad\ \downarrow\tau \quad \downarrow\delta \quad\ \ \downarrow\tau & & \quad\ \downarrow\tau \quad \downarrow\delta \quad\ \ \downarrow\lambda \\ \varphi_2 : Q_2 \times A_2 \longrightarrow Q_2 & & \varphi_2 : Q_2 \times A_2 \longrightarrow B_2. \end{array}$$

Автоматная функция автомата получается из автоматной функции изоморфного ему, подстановкой на этот автомат сверху и снизу подходящих булевых функций. В дальнейшем нам будет удобно называть эквивалентными также автоматы изоморфные эквивалентным.

Пусть $R \subseteq \mathbf{P}$, обозначим через $[R]$ — множество a-функций, эквивалентных получающихся из R с помощью операций суперпозиции. Класс автоматных функций R называется замкнутым, если

$$R = [R].$$

Класс автоматных функций R называется предполным, если $R \subset \mathbf{P}$ и для любой автоматной функции $f \notin R$ выполнено

$$[\{f\} \bigcup R] = \mathbf{P}.$$

Автоматную функцию G_0, задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = a(t), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

назовём автоматной функцией «задержки».

Автоматную функцию T_0, задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} (q_1(1), q_2(1)) = (0,0) \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (a_1(t), a_2(t)); \text{при } a_1(t)a_2(t) = 00 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{и } a_1(t)a_2(t) = 11 \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (q_1(t), q_2(t)), \text{ при } a_1(t)a_2(t) = 01 \\ (q_1(t+1), q_2(t+1)) = (q_2(t), q_1(t)), \text{ при } a_1(t)a_2(t) = 10 \\ (b_1(t), b_2(t)) = (q_1(t), q_2(t)), \end{cases}$$

назовём автоматной функцией «триггер».

Константной автоматной функцией назовем автоматную функцию, выдающую одно и тоже периодическое выходное сверхслово на всех входных сверхсловах. Класс константных автоматных функций обозначим через $\mathbf{K}$. Обозначим множество добавочных автоматов через

$$D_1 = \mathbf{K} \cup \mathbf{P_2} \cup \{G_0, T_0\}.$$

Автомат называется *автоматом Медведева*, если

$$B = Q, \ \psi(q,a) = q, \ q \in Q, \ a \in A.$$

Функция переходов $\varphi : Q \times A \to Q$ естественным образом обобщается на слова входного алфавита $\varphi : Q \times A^* \to Q$ по формуле

$$\varphi(q, \alpha a) = \varphi(\varphi(q, \alpha), a).$$

Аналогично обобщается выходная функция $\psi : Q \times A \to B$ на слова входного алфавита $\psi : Q \times A^* \to B$ по формуле

$$\psi(q, \alpha a) = \psi(\varphi(q, \alpha), a).$$

Через $\overline{\psi} : Q \times A^* \to B^*$ обозначается выходная функция на словах, рекуррентно вычисляемая по формуле

$$\overline{\psi}(q, \alpha a) = \overline{\psi}(q, \alpha)\psi(q, \alpha a).$$

Пусть $\varphi_a(q) = \varphi(q,a), a \in A$, множество подстановок вида $\{\varphi_a, a \in A\}$ порождает полугруппу подстановок $S_{\mathsf{A}} = \{\varphi_\alpha, \alpha \in A^*\}$, называемую полугруппой автомата A. Для множества автоматов M, обозначим через $S_M = \{S_{\mathsf{A}} | \mathsf{A} \in M\}$ множество полугрупп автоматов из M.

Автомат называется групповым, если все φ_a (а следовательно и все $\varphi_\alpha, \alpha \in A^*$) являются биекциями на Q. В этом случае полугруппа автомата является группой. Имеет место

Теорема 1. *Не существует предполного класса автоматных функций содержащего замкнутый класс* $[\mathbf{K} \cup \mathbf{P_2} \cup \{G_0, T_0\}]$.

Основная лемма и доказательство теоремы

Существует другой подход к функциональной системе автоматов с операцией суперпозиции. Этот подход отслеживает зависимость полугруппы автомата результата от полугрупп автоматов участников суперпозиции [6].

Пусть S конечная полугруппа, с нею ассоциируется *стандартный автомат полугруппы* S

$$\mathsf{A}_S = (S, S^1, S, \circ, \psi_0, 1),$$

где S^1 — это полугруппа S (с добавленной единицей, если единицы нет), $\circ$ операция умножения в полугруппе S, $\psi_0(q, a) = q, q \in S^1$. Заметим, что полугруппа стандартного автомата полугруппы S есть S.

$$S_{\mathsf{A}_S} = S.$$

Множество всех стандартных автоматов полугрупп обозначим через

$$M_0 = \{\mathsf{A}_S | S \in \mathbf{S}\}.$$

Если полугруппа S транзитивно действует на множестве Q, то автомат

$$\mathsf{A} = (S, Q, Q, \varphi, \psi_0, q_0),$$

где $\varphi(q, s) = s(q), q \in Q, s \in S$, назовём *стандартным автоматом с полугруппой* S.

Обозначим через $\mathbf{S}$ функциональную систему конечных полугрупп с операциями взятия подполугрупп и гомоморфных образов, а через $<\mathbf{S}_0>$ замыкание множества полугрупп $\mathbf{S}_0 \subseteq \mathbf{S}$ относительно указанных операций. Пусть

$$D_0 = \{\mathbf{P_2} \cup \{G_0, T_0\}\}.$$

Через $\mathbf{PRIME} \subseteq \mathbf{S}$ обозначим множество простых конечных групп. Известная теорема Крона-Роудза [6], в определённых выше автоматных терминах имеет вид

Теорема 2 ([6]). *1) Пусть $M \subseteq M_0$ система стандартных автоматов полугрупп, тогда $M \cup D_0$ полна точно тогда, когда $<S_M> \supseteq \mathbf{PRIME}$.*

2) Пусть $C \in \mathbf{PRIME}$ тогда $\mathsf{A}_C \in [M \cup D_0]$ точно тогда когда найдётся $\mathsf{F} \in M, \mathsf{A}_C \in [F \cup D_0]$.

Пусть $A' \subseteq A^*$ некоторое конечное подмножество входных слов, автомат

$$\mathsf{A}' = (A', Q, B', \overline{\varphi}, \overline{\psi}, q_0),$$

где $\mathsf{B}' = \overline{\psi}(Q, A')$, называется *подавтоматом* автомата A. Если же $A' \subseteq A^t$ является подмножеством слов одной и той же длины t, то указанный подавтомат назовём *t-подавтоматом* автомата A. t-подавтоматы являются частным случаем вербальных подавтоматов, изученным автором в работе [8]. Там автор показал, что операция взятия вербального подавтомата перестановочна с операцией суперпозиции.

Пусть C *простая некоммутативная группа*, а $\tilde{C}$ ей изоморфная транзитивная группа перестановок на множестве Q, автомат Медведева

$$Pr(C) = (\tilde{C}, Q, \tilde{C}, \tilde{\varphi}, \psi_0, q_0)$$

назовём *простым* автоматом, здесь $\tilde{\varphi}(q, \tilde{c}) = \tilde{c}(q)$. То есть, простой автомат — это стандартный автомат с простой группой.

Скажем, что а.-функция V выразима *параллельной суперпозицией* через а.-функции из M, если она выразима схемой из автоматов $M \cup D_1$, в которой никакой путь ведущий от выхода одного автомата из M не попадает на вход другого автомата из M.

Множество простых автоматов для всех некоммутативных простых групп обозначим через **Prime**. Для одной простой группы C возможно существование нескольких неизоморфных простых автоматов, но все они выразимы друг через друга параллельными суперпозициями с использованием булевых функций [9]. Заметим что, если $C_1 \subseteq C$ простая подгруппа группы C, то простой автомат с группой C_1 выразим суперпозициями с использованием булевых функций через простой автомат с группой C [7].

Основная лемма. *Пусть $Pr(C) \in [M \bigcup D_1]$, тогда найдётся один автомат $\mathsf{A} \in M$ такой что $Pr(C) \in [\mathsf{A} \bigcup D_1]$.*

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим систему автоматов **Prime**$\bigcup D_1$. По теореме 2 это полная система, она содержит систему из стандартных автоматов с простыми группами, простые коммутативные группы являются подгуппами подходящих простых некоммутативных групп, а $D_1 \supseteq D_0$. Система **Prime** останется полной, если в ней оставить только знакопеременные простые группы. В самом деле: всякая группа является подгруппой подходящей знакопеременной, в том числе и знакопеременная меньшего порядка. Без ограничения общности будем считать, что **Prime** состоит только из автоматов со знакопеременными группами.

Если существует предполный класс

$$\mathbf{M} \supseteq \mathbf{D_1} = [\mathbf{K} \cup \mathbf{P_2} \cup \{G_0, T_0\}],$$

то для $\mathbf{Prime} \bigcap \mathbf{M}$ имеется две возможности:

1) выполнено $\mathbf{Prime} \subset \mathbf{M}$;

2) число простых групп для автоматов из $\mathbf{Prime} \bigcap \mathbf{M}$ конечно. В самом деле: если $\mathbf{PRIME} \bigcap \mathbf{M}$ бесконечно, то для всякого автомата с простой группой C в этом множестве найдётся автомат со знакопеременной группой, содержащей C в качестве подгуппы.

В первом случае $\mathbf{M}$ полная система, и не является предполным классом. Во втором случае по основной лемме и теореме 2 полугруппа добавляемого автомата должна иметь бесконечно много простых групп-делителей, что противоречиво. Поэтому $[\mathbf{M} \bigcup \{f\}] \neq \mathbf{P}$. Теорема доказана.

Доказательство основной леммы

Напомним, что $D_1 = \mathbf{K} \cup \mathbf{P_2} \cup \{G_0, T_0\}$ это добавочная система из константных автоматов, булевых функций, «задержки» и «триггера».

Пусть f и g автоматные функции, задаваемые автоматами

$$\mathsf{F} = (A, Q, V, \varphi, \psi, q_0), \quad \mathsf{G} = (B, P, V, \overline{\varphi}, \overline{\psi}, q_0),$$

$B \subseteq A^t$, $i \geqslant j, k, t$ натуральные числа. Скажем, что f **копирует** *g, если для любого натурального s и для любого входного сверхслова $\beta \in B^\infty$ выполнено*

$$f(i + ks) = g(j + ks),$$

где $f(i + st)$ и $g(j + st)$ выходная буква функций f и g после подачи сверхслова $\beta \in B^\infty$ в моменты $i + kt$ и $j + kt$, соответственно. Имеют место

Лемма о копировании [4]. *Если автоматная функция f копирует автоматную функцию g, порождённую автоматом Медведева, то g выразима через f параллельной суперпозицией.*

Лемма 1. *Если автомат A эквивалентен простому автомату $Pr(C)$, то найдётся его групповой t-подавтомат эквивалентный простому автомату с той же группой C.*

Доказательство леммы 1. Пусть $Pr(C) = (\tilde{C}, R, \tilde{C}, \tilde{\varphi}, \psi, e)$, $\mathsf{A} = (\tilde{C}, Q, \tilde{C}, \varphi, \psi, q_0)$,

Пусть $c_0 \in \tilde{C}$ входная буква, рассмотрим подавтоматы

$$Pr(C)', \quad \mathsf{A}',$$

порождённые множеством двухбуквенных слов

$$\{cc_0 | c \in \tilde{C}\}.$$

Это эквивалентные автоматы, так как их автоматные функции являются сужением эквивалентных автоматных функций на множество $(\tilde{C}c)^*$. При этом автомат $Pr(C)'$ это простой автомат с группой C.

Если $\varphi_{c_0} : Q \to Q$, не биекция, то $Q' = \varphi_{c_0}(Q) \subset Q$, а подавтомат A' это автомат $(\tilde{C}c, Q', \tilde{C}c, \varphi, \psi, q_0{}')$, с меньшим множеством состояний Q'.

Продолжая эту процедуру мы придём к автомату, эквивалентному простому, у которого все $\varphi_c : Q \to Q$, являются биекциями, (то есть групповому). Лемма доказана.

Утверждение 1. *Если в автомате* A *есть групповой подавтомат эквивалентный простому автомату* $Pr(C)$*, то найдётся и групповой* t*-подавтомат эквивалентный простому автомату с той же группой* C.

Доказательство утверждения. В самом деле: пусть

$$\mathsf{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0), \quad A' \subset A^*,$$
$$\mathsf{A}' = (A', Q, B', \overline{\varphi}, \overline{\psi}, q_0),$$

групповой подавтомат эквивалентный простому автомату $Pr(C)$. Пусть $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Среди слов длины $2n$, содержащих ровно две копии каждого элемента $c_i, i = 1, \ldots, n$ найдутся такие

$$s_{i,j} = (c_1)(c_1{}^{-1})(c_2)(c_2{}^{-1}) \ldots ((c_i)(c_j)(c_i{}^{-1})(c_j{}^{-1})) \ldots (c_n)(c_n{}^{-1}),$$

которые, как элементы группы C — суть коммутаторы $c_i c_j c_i^{-1} c_j^{-1}$.

Пусть C_1 — это множество коммутаторов группы C. Среди слов длины $4n$ в алфвите C содержащих ровно четыре копии каждого элемента найдутся такие что, как элементы группы C — это попарные произведения коммутаторов $c_i c_j c_i^{-1} c_j^{-1} c_k c_l c_k^{-1} c_l^{-1}$ и сами коммутаторы. Обозначим множество элементов группы C представимых такими словами через C_2, и т. д. для длины $2kn$ — через C_k. Словами из C_k представимы произведения не более k штук коммутаторов. Выполнено соотношение

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots C_k.$$

Поскольку простая группа порождается своими коммутаторами, найдётся такое k, что $C_k = C$.

Пусть $\Theta : C \to A'$, биекция входных алфавитов автоматов A и $Pr(C)$. Слова из $\Theta(C^{kn})$ имеют одинаковую длину, поскольку в них входит каждое слово из A' по $2k$ раз. Выбрав из них разных представителей для каждого элемента группы C получим t-подавтомат автомата A, эквивалентный $Pr(C)$. Утверждение доказано.

Лемма 2. *Пусть групповой автомат* F*, эквивалентный простому автомату, получился операцией подстановки автомата* A *на автомат* B*, тогда простой автомат с той же группой выразим параллельной суперпозицией либо через автомат* A*, либо через автомат* B.

Доказательство. По лемме 1 можно считать, что автомат F групповой, а автоматы A и B приведенные. Заметим, что простой автомат $Pr_1(C)$ получается из автомата F «склейкой» эквивалентных состояний, поэтому существует гомоморфизм групп

$$f : G_{\mathsf{F}} \to C.$$

Очевидно, что автомат A — тоже групповой, и существует гомоморфизм группы автомата F на группу верхнего автомата A

$$g : G_{\mathsf{F}} \to G_{\mathsf{A}}.$$

В групповом приведенном автомате A существует входное слово α_0 попарно отличающее все состояния и задающее тождественную подстановку состояний [7].

Ядро $Ker(g)$ гомоморфизма g это множество перестановок, тождественно дейстующих в верхнем автомате A. По теореме о гомоморфизмах $f(Ker(g))$ — нормальный делитель в простой группе C. Возможны аварианты 1,2.

1. В случае, если $f(Ker(g)) = E$, по теореме о гомоморфизмах получаем

$$\begin{array}{ccc} f : G_{\mathsf{F}} & \longrightarrow & C \\ g \searrow & & \nearrow h \\ & G_{\mathsf{A}} & \end{array}$$

существование гомоморфизма $h : G_{\mathsf{A}} \to C$. Рассмотрим t-подавтомат A' верхнего автомата $\mathsf{A} = (A, Q, Y, \varphi, \psi, q_0)$, порождённый множеством входных слов $A' = \{a\alpha_0 | a \in A\}$.

$$\mathsf{A}' = (A', Q, Y', \overline{\varphi}, \overline{\psi}, q_0),$$

Множество этих слов в автомате $Pr_1(C)$ задаёт подстановки составляющие всю группу C, при этом автомат A' эквивалентен при походящем t стандартному автомату Медведева, с группой G, поскольку $\overline{\psi}(q_1, a\alpha_0) \neq \overline{\psi}(q_2, a\alpha_0)$ при всех $q_1, q_2 \in Q$ и при всех $a \in A$.

Как следует из [9], из стандартного автомата с группой G можно параллельной суперпозицией получить автомат A_G, а из него (группа C является гомоморфным образом G) можно получить параллельной суперпозицией простой автомат с группой C.

2. В случае, если $f(Ker(g)) = C$ — это вся группа C, по лемме 1 и утверждению в алфавите A можно выбрать конечное подмножество слов X одинаковой длины, таких что их подстановки в автомате F лежат в ядре $\mathrm{Ker(g)}$ и эти же слова порождают все элементы группы C в автомате $Pr_1(C)$. Тогда подавтомат

$$\mathsf{A}'' = (X, Q, Y', \overline{\varphi}, \overline{\psi}, q_0),$$

является t-подавтоматом нижнего автомата B и эквивалентен $Pr_1(C)$. Применяя утверждение и лемму о копировании получаем, что простой автомат с группой C выразим параллельной суперпозицией через автомат B. Лемма доказана.

Доказательство основной леммы. Пусть автомат $\mathsf{F} \in [M \cup D_1]$ эквивалентен простому автомату с группой C. Зафиксируем схему, реализующую автомат F как результат подстановки автомата A на автомат B, так чтобы в части схемы равной A, как и в части схемы равной B, присутствовали автоматы из множества M.

По лемме 1 и утверждению можно считать автомат F групповым, по лемме 2 простой автомат с группой C выразим либо через верхний автомат A либо через нижний автомат B, при этом глубина суперпозиции, выражающей каждый из автоматов A и B (считая глубину лишь по автоматам из M) меньше по сравнению с глубиной суперпозиции, выражающей исходный автомат F.

Продолжим декомпозицию до тех пор пока схема не станет глубины 1 (считая глубину лишь по автоматам из M).

Далее, в параллельной суперпозиции соберём в блоки все автоматы одного типа $\mathsf{A}_i \in M_1$, где M_1 конечное множество автоматов из M в первоначальной схеме. Последовательно применяя лемму 2, так чтобы разделять параллельные блоки между компонентами суперпозиции, будем каждый раз получать выразимость простого автомата параллельной суперпозицией всё более меньшего числа автоматов из M_1, пока не получим выразимость искомого автомата параллельной суперпозицией всего одного из них. Основная лемма доказана.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[2] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // ДАН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 493–496.

[3] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 1. — С. 35–37.

[4] Бабин Д. Н. О полноте двухместных автоматных функций относительно суперпозиции // Дискретная математика. — 1989. — Т. 1, вып. 4. — С. 423–431.

[5] Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразие Поста // Алгебра и логика. — 1966. — Т. 5, № 2. — С. 5–24.

[6] Арбиб М. Алгебраическая теория автоматов языков и полугрупп. — М.: Статистика, 1975.

[7] Алешин С. В. Об одном следствии теоремы Крона-Роудза // Дискретная математика. — 1999. — Т. 11, вып. 4. — С. 101–109.

[8] Бабин Д. Н. Вербальные подавтоматы и задача полноты // Вестник Московского университета. — 1985. — № 3. — С. 54–56.

[9] Алешин С. В. Алгебраические системы автоматов. — М.: Maks Press, 2016.

[10] Летуновский А. А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 161–170.

[11] Бабин Д. Н., Летуновский А. А. О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 71–77.

[12] Кудрявцев В. Б. Кафедра математической теории интеллектуальных систем (МаТИС) // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 2. — С. 5–30.