# О разложении графов на подграфы специального вида

Р. А. Ищенко (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

В работе рассматриваются основные результаты, связанные с разложением графов в виде объединения деревьев, псевдодеревьев и деревьев-звезд. Приводятся собственные результаты о хроматическом числе этих графов.

**Ключевые слова:** древесность, хроматическое число.

## Введение

В 60-е годы прошлого столетия математики Уильям Татт (William Tutte) и Криспин Нэш-Уильямс (Crispin Nash-Williams) независимо разработали теории, касающиеся представления графов в виде объединения непересекающихся по ребрам остовных лесов. Одной из областей применения данных результатов является задача достижения наибольшего быстродействия сетей. Если в качестве вершин графа рассматривать узлы коммуникационной сети (компьютеры), а в качестве ребер — соединения между ними, то наличие в графе нескольких непересекающихся остовов позволит информации распространяться по ним параллельно, что многократно увеличит пропускную способность по отношению к графу, содержащему всего одно остовное дерево.

Эти работы побудили других ученых к исследованию разложения графов на другие, схожие по структуре, семейства, в частности, на *псевдодеревья* и *деревья-звезды*. *Псевдодерево* — граф, содержащий не более одного цикла (рис. **??**). Псевдодеревья впервые встречаются в литературе в 1963 году в книге [**?**], посвященной линейному программированию, в которой псевдодеревья возникают в качестве решения определенной задачи транспортной сети. *Граф-звезда* $S_n$ — это полный двудольный граф $K_{1,n}$, иными словами дерево с одним внутренним узлом и $n$ листьями (рис. **??**). Звездочная топология компьютерной сети играет важную роль в распределенных вычислениях.

Отметим, что задача разложения графов (graph covering) — одна из наиболее классических областей исследований в теории графов. Первая работа по этой теме была написана еще в 1891 году одним из основателей теории графов Юлиусом Петерсеном, который показал, что ребра $2k$-регулярного графа можно покрыть при помощи $k$ наборов вершинно-непересекающихся циклов. С многочисленными обзорами по теме разложения графов можно ознакомиться в [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**].

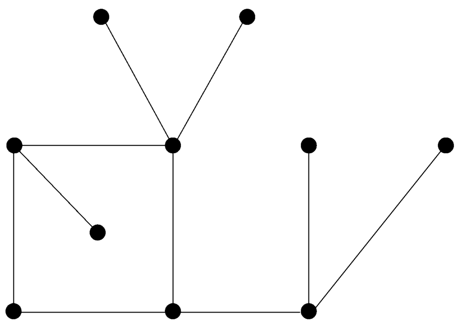

Рис. 1. Псевдодерево.

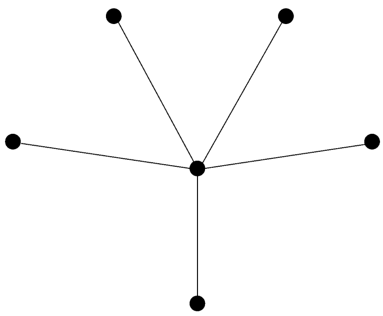

Рис. 2. Звезда $S_5$.

## Древесность, псевдодревесность и звездная древесность

*Древесностью графа* $G$ называют наименьшее число непересекающимся по ребрам остовных лесов, на которые можно разложить граф $G$, и обозначают $a(G)$. Например, $a(K_4) = 2$, а $a(K_5) = 3$. На рис. **??** показаны минимальные разложения этих графов на остовные леса.

Древесность является мерой плотности графа — графы с большим числом рёбер имеют высокую древесность, а графы с высокой древесностью должны иметь плотные подграфы.

Поскольку любой $n$-вершинный лес имеет максимум $n-1$ ребро, древесность графа с $n$ вершинами и $m$ рёбрами не меньше $\lceil m/n-1 \rceil$. Кроме того древесность графа должна быть не меньше максимальной древесности его подграфов. Нэш-Вильямс доказал, что эти два факта можно скомбинировать для характеризации древесности.

Ниже мы будем использовать $V(G)$ для обозначения множества вершин графа $G$ и $W(G)$ — для обозначения множества ребер графа $G$.

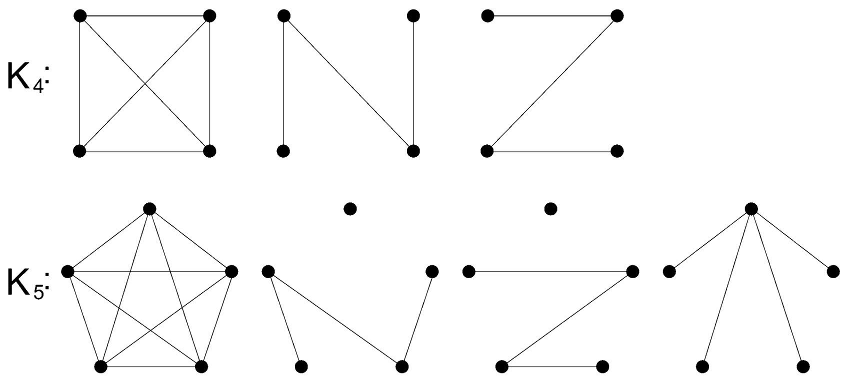


Рис. 3. Разложение графов $K_4$ и $K_5$ на остовные леса.

**Теорема 1 (см. [?]).** *Пусть* $G = (V(G), W(G))$ — *нетривиальный граф. Тогда*

$$a(G) = \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{|W(H)|}{|V(H)| - 1} \right\rceil .$$

Очевидно, что для графов $K_n$ и полного двудольного графа $K_{n,m}$ наибольшее значение $\lceil |W(H)|/(|V(H)| - 1) \rceil$ достигается при $H = K_n$ и $H = K_{n,m}$ соответственно.

**Следствие 1.** *Древесности полных и полных двудольных графов равны* $a(K_n) = \lceil n/2 \rceil$ *и* $a(K_{n,m}) = \lceil nm/(n + m - 1) \rceil$ *соответственно.*

Любой планарный граф с $n$ вершинами имеет максимум $3n - 6$ [?] ребер, поэтому из формулы Нэша-Вильямса следует

**Следствие 2.** *Древесность планарного графа не превышает трех.*

*Псевдолес* — граф, в котором каждая связная компонента имеет максимум один цикл. *Псевдодревесностью* графа $G$ называют наименьшее число непересекающихся по ребрам остовных псевдолесов, на которые можно разложить граф $G$, и обозначают $p(G)$. Picard и Queyranne [?] показали, что это число эквивалентно минимальному $k$, такому что ребра графа $G$ могут быть ориентированы таким образом, чтобы вершины получившегося ориентированного графа имели полустепень исхода не больше $k$. Согласно работе Frank и Gyarfas, это число будет эквивалентно максимальному отношению ребер к вершинам в любом подграфе графа.

**Теорема 2 (см. [?]).** *Для графа $G$ выполнено:*

$$p(G) = \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{|W(H)|}{|V(H)|} \right\rceil .$$

Учитывая результат теоремы **??**, получаем:

$$p(G) \leqslant a(G) \leqslant p(G) - 1.$$

*Звездной древесностью* $sa(G)$ графа $G$ называют минимальное число *лесов-звезд*, то есть лесов, не содержащих путей длины 3. Термин был предложен математиками Jim Akiyama и Mikio Kano [?], и с тех пор этой темой занимались многие исследователи. Hakimi [?] показал, что внешнепланарные и планарные графы имеют звездную древесность не более 3 и 5, соответственно. То, что эта оценка неулучшаема, установили Algor и Alon [?]. Далее, обозначив $tw(G)$ *древесную ширину* графа $G$, получим (см. Ding [?]):

$$sa(G) \leqslant tw(G) + 1.$$

Эта оценка неулучшаема, см. Dujmivic и Wood [?].

Если дерево не является само звездой, его звездная древесность равна двум, что можно увидеть, если разбить ребра на два подмножества — с нечетным и четным расстоянием от корня. Таким образом,

$$sa(G) \leqslant 2a(G).$$

То, что эта оценка неулучшаема, показал Alon [?].

На момент написания статьи формула для вычисления звездной древесности (аналогичная формуле Нэш-Вильямса) не установлена, однако известна звездная древесность полных графов.

**Теорема 3 (см. [?]).** *При $n > 3$ звездная древесность графа $K_n$ равна* $\lceil n/2 \rceil + 1$.

## Алгоритмы, вычисляющие древесность графа

Определение древесности графа является специальным случаем задачи *разложения матроида.*

*Матроид* — пара $(X, I)$, где $X$ — конечное множество, называемое носителем матроида, а $I$ — некоторое множество подмножеств $X$, называемое семейством *независимых* множеств, то есть $I \subseteq 2^X$. При этом должны выполняться следующие условия:

1) $\varnothing \in I$,
2) если $A \in I$ и $B \subset A$, то $B \in I$,
3) если $A, B \in I$ и мощность $A$ больше мощности $B$, то существует $x \in A \setminus B$ такой, что $B \cup x \in I$.

*Базами матроида* называются максимальные по включению независимые множества. Подмножества $X$, не принадлежащие $I$, называются *зависимыми* множествами.

Если мы в качестве множества $X$ рассмотрим множество ребер графа, а в качестве множества $I$ — ациклические подмножества этих ребер, то нетрудно проверить, что все 3 условия будут выполнены. Базами этого матроида являются остовные леса графа.

Говорят, что *древесность имеет матроидную структуру*.

В задаче *разложения матроида* требуется представить элементы матроида в виде объединения наименьшего количества независимых множеств. В 1992 году Gabow и Westermann [**?**] разработали алгоритм, позволяющий решить эту задачу (а следовательно, и определить древесность графа) за полиномиальное время.

Нетрудно убедиться, что псевдодревесность также имеет матроидную структуру.

Что касается вычисления звездной древесности графа, то даже задача определения равна ли звёздная древесность графа двум или нет, является NP-полной, что было установлено в 1996 году [**?**].

## Связь хроматического числа и древесности

Имеется множество работ, в которых получены оценки хроматического числа графа в зависимости от его разложимости на подграфы. Чаще всего речь идет о *толщине графа* — наименьшем числе плоских подграфов, на которые можно разложить ребра [**?**, **?**, **?**].

Но существуют и другие работы в этой области. Steven Butler [**?**] установил следующее соотношение между хроматическим числом графа и его древесностью.

**Теорема 4.** *Хроматическое число графов древесности $n$ равно $2n$.*

Другими словами, хроматическое число любого графа не превышает удвоенного значения его древесности, и эта оценка неулучшаема. В качестве примера можно взять граф $K_{2n}$.

Ниже мы приведем собственные рассуждения, касающиеся соотношений между хроматическим числом графа и его псевдо- и звёздной древесностью.

**Теорема 5.** *Хроматическое число графов псевдодревесности $n$ равно $2n+1$.*

**Доказательство.** Псевдодревесность графа $K_{2n+1}$ равна $n$. В этом нетрудно убедиться, воспользовавшись формулой из теоремы **??**, но для большей наглядности мы воспользуемся хорошо известным фактом, что полный граф $K_{2n+1}$ может быть представлен в виде объединения $n$ гамильтоновых циклов. Для этого нужно расположить вершины от 1 до $2n$ на круге (см. рис. **??**) и нарисовать «зигзаг», проходящий через все вершины этого круга. После чего соединить концы этого пути с вершиной $2n+1$. Если мы повернем зигзаг $n$ раз, то и получим искомое разложение.

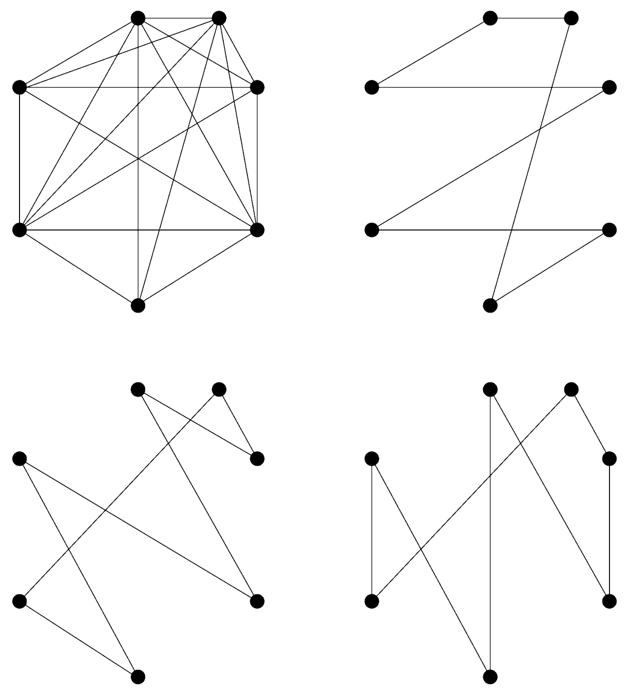

Рис. 4. Разложение графа $K_7$ на гамильтоновы циклы.

Так как гамильтоновый цикл является остовным псевдодеревом, то мы показали, что существует граф псевдодревесности $n$, для раскраски которого необходимы $2n+1$ цветов.

Теперь докажем индукцией по числу вершин, что любой граф с псевдодревесностью, не превосходящей $n$, можно раскрасить при помощи не более, чем $2n + 1$ цветов. Очевидно, что граф из одной вершины можно раскрасить не более, чем $2n+1$ цветов. Пусть утверждение будет верно для любого графа псевдодревесности не больше, чем $n$, с количеством вершин, равным $p - 1$. Рассмотрим граф $G = (V, W), |V| = p, p(G) \leqslant n$. Заметим, что количество ребер в этом графе не превосходит $np$. Поэтому сумма степеней всех вершин графа $G$ не превосходит $2np$, следовательно, в графе существует вершина $v$ степени не более чем $2n$. Удалим из графа $G$ вершину $v$, получим граф $G^*$, который является $2n + 1$-раскрашиваемым по предположению индукции. Добавим вершину $v$. Так как она смежна с не более, чем $2n$ вершинами, мы сможем раскрасить её правильным образом одним из $2n + 1$ цветов. Теорема доказана.

**Теорема 6.** *Хроматическое число графов со звёздной древесностью $n$ равно $n + 1$.*

**Доказательство.** Из теоремы **??** следует, что $sa(K_{n+1}) \leqslant n$. Поэтому хроматическое число графов со звёздной древесностью $n$ не меньше $n + 1$. Покажем теперь, что $n + 1$ цветов будет достаточно для правильной раскраски любого графа звездной древесности $n$. Пусть граф $G = (V, W)$ раскладывается в виде объединения $n$ звезд $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Пусть $S = \{v \in V \mid \exists\, i \text{ такое что } v \text{ — внутренний узел } G_i\}$, $|S| = l$, $l \leqslant n$. Раскрасим вершины множества $S$ в $l$ различных цветов, а остальные вершины в цвет $l + 1$. Докажем, что это правильная раскраска графа.

Рассмотрим две любые соседние вершины $v$, $w$ графа $G$. Существует звезда $G_i$, включающая ребро $\{v, w\}$. Поэтому как минимум одна из вершин $v$, $w$ принадлежит множеству $S$, следовательно, $v$, $w$ окрашены в разные цвета. Теорема доказана.

## Список литературы

[1] Dantzig G. B. Linear Programming and Extensions. — Princeton University Press, 1963.

[2] Beineke L. W. A survey of packings and coverings of graphs, The Many Facets of Graph Theory // Proc. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1968. — Berlin: Springer, 1969. — P. 45–53.

[3] Harary F. Covering and packing in graphs. I // Ann. New York Acad. Sci. — 1970. — 175. — P. 198–205.

[4] Harary F., Schwenk A. J. Evolution of the path number of a graph: Covering and packing in graphs. II // Graph theory and computing. — New York: Academic Press, 1972. — P. 39–45.

[5] Akiyama J., Exoo G., Harary F. Covering and packing in graphs. III. Cyclic and acyclic invariants. — Math. Slovaca. — 1980. — 30, no. 4. — P. 405–417.

[6] Graham N., Harary F. Covering and packing in graphs. V. Mispacking subcubes in hypercubes // Comput. Math. Appl. — 1988. — 15, no. 4. — P. 267–270.

[7] Mutzel P., Odenthal T., Scharbrodt M. The thickness of graphs: a survey // Graphs Combin. — 1998. — 14, no. 1. — P. 59–73.

[8] Nash-Williams C. St. J. A. Edge disjoint spanning trees of finite graphs // J. London Math. Soc. — 1961. — 36. — P. 445–450.

[9] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

[10] Picard J.-C., Queyranne M. A network flow solution to some nonlinear 0–1 programming problems, with applications to graph theory // Networks. — 1982. — 12, no. 2. — P. 141–159.

[11] Frank A., Gya'rf'as A. How to orient the edges of a graph? // Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. I, Colloq. Math. Soc. Ja'nos Bolyai. — North-Holland, Amsterdam, 1978. — Vol. 18. — P. 353–364.

[12] Akiyama J., Kano M. Path factors of a graph // Graphs and applications (Boulder, Colo., 1982), Wiley-Intersci. Publ. — New York: Wiley, 1985. — P. 1–21.

[13] Hakimi S. L., Mitchem J., Schmeichel E. F. Star arboricity of graphs // Discrete Math. — 1996. — 149, no. 1–3. — P. 93–98.

[14] Algor I., Alon N. The star arboricity of graphs // Discrete Math. — 1989. — 75, no. 1–3. — P. 11–22.

[15] Ding G., Oporowski B., Sanders D. P., Vertigan D. Partitioning graphs of bounded tree-width // Combinatorica. — 1998. — 18, no. 1. — P. 1–12.

[16] Dujmovicґ V., Wood D. R. Graph treewidth and geometric thickness parameters // Discrete Comput. Geom. — 2007. — 37, no. 4. — P. 641–670.

[17] Alon N., McDiarmid C., Reed B. Star arboricity // Combinatorica. — 1992. — 12, no. 4. — P. 375–380.

[18] Gabow H. N., Westermann H. H. Forests, frames, and games: Algorithms for matroid sums and applications // Algorithmica. — 1992. — 7. — P. 465–497.

[19] Ringel G. Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Mathematische Monographien. Vol. 2. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.

[20] Jensen T. R., Toft B. Graph Coloring Problems. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. — New York: John Wiley & Sons Inc., 1995.

[21] Ищенко Р. А. Хроматическое число бипланарных графов без треугольников // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 223–226.

[22] Butler S. Relating the arboricity with the chromatic number of a graph.