Графы групповых автоматов

Ищенко Р. А.

В работе вводится понятие граф автомата. Рассматривается задача определения принадлежности автомата к классу групповых автоматов по его графу. Приводится свойство графов групповых автоматов. Доказана теорема о существовании группового автомата с графом заданного вида.
Ключевые слова: автомат, граф, групповой автомат.

Введение

Понятие граф автомата представляет собой модифицированную концепцию диаграммы Мура. Мы будем называть *графом автомата* $V = (A, Q, \varphi)$ размеченный ориентированный граф $G = (Q, W, f)$, вершины которого соответствуют состояниям автомата, при этом

$$e = (q_i, q_j) \in W,\ f(e) = a \Leftrightarrow \varphi(q_i, a) = q_j,$$

где $f : W \to A$, $a \in A$.

Рассматриваются следующие задачи:

1) по графу автомата определить, является ли автомат групповым;

2) в каких случаях неразмеченный ориентированный граф $G = (Q, W)$ можно доопределить до графа $G' = (Q, W, f)$ некоторого группового автомата.

Эквивалентные определения группового автомата

Определение 1 (см. [1])**.** *Автомат $V = (A, Q, \varphi)$ называется групповым, если $\forall\, \alpha \in A^*$ отображение $\varphi_\alpha(q) = \varphi(q, \alpha)$ есть перестановка на множестве Q.*

Очевидно, что для определения принадлежности автомата классу групповых достаточно рассмотреть лишь отображения, порождаемые буквами алфавита A.

Утверждение 1. *Автомат $V = (A, Q, \varphi)$ является групповым $\Leftrightarrow \forall\, a \in A$ отображение $\varphi_a(q) = \varphi(q, a)$ есть перестановка на множестве Q.*

Критерий принадлежности автомата классу групповых

Для того, чтобы по графу автомата убедиться, что ему соответствует групповой автомат, достаточно проверить, что подграфы, порожденные ребрами с одинаковыми отметками, являются совокупностью ориентированных циклов.

Утверждение 2. *Пусть дан граф $G = (Q, W, f)$ некоторого автомата $V = (A, Q, \varphi)$, $A = (a_1, \ldots, a_m)$. $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$ рассмотрим подграф $G_i = (Q, W_i)$, где $W_i = \{e \in W | f(e) = a_i\}$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *автомат $V = (A, Q, \varphi)$ является групповым*
2) $\forall\, G_i$, $i \in \{1, \ldots, m\} \forall\, q \in Q$ $deg\_in(q) = deg\_out(q) = 1$
3) $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}\, G_i$ *— совокупность ориентированных циклов без изолированных вершин.*

$1 \Leftrightarrow 2$. Пусть $G = (Q, W, f)$ — граф некоторого автомата $V = (A, Q, \varphi)$. Рассмотрим подграф $G_i = (Q, W_i)$. Условие $\forall\, q\, deg\_in(q) = deg\_out(q) = 1$ равносильно тому, что φ_{a_i} — биективное отображение, так как:

1) φ_{a_i} — отображение $\Leftrightarrow \forall\, q\, deg\_out(q) = 1$;
2) φ_{a_i} инъективна $\Leftrightarrow \forall\, q\, deg\_in(q) \leqslant 1$;
3) φ_{a_i} сюръективна $\Leftrightarrow \forall\, q\, deg\_in(q) \geqslant 1$.

Согласно утверждению 1, V — групповой $\Leftrightarrow \varphi_{a_i}$ — биекция $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$.

$3 \Rightarrow 2$. Справедливо по определению цикла.

$2 \Rightarrow 3$ Рассмотрим любую ориентированную простую цепь $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ графа G_i. Так как $deg\_out(q_k) = 1$, то $\exists\, q_{k+1} : (q_k, q_{k+1}) \in W_i$, при этом $\forall\, i \in \{2, \ldots, k\}$ $q_{k+1} \neq q_i$, так как $deg\_in(q_i) = 1$. Ясно, что на каком-то шаге цепь замкнется, после чего следует рассмотреть любое ребро графа G_i, которое мы еще не рассматривали. В конце концов, мы убедимся, что граф G_i является совокупностью ориентированных циклов. Утверждение доказано.

Свойство графа группового автомата

Из утверждения 2 следует следующее свойство графа группового автомата.

Утверждение 3. *Если $G = (Q, W, f)$ — граф некоторого группового автомата $V = (A, Q, \varphi)$, $|A| = m$, то $\forall\, q \in Q$ $deg\_in(q) = deg\_out(q) = m$.*

Отметим, что из того, что граф автомата обладает указанным свойством, еще не следует, что автомат является групповым. В качестве примера можно рассмотреть граф, изображенный на рис. 1. Входящие и исходящие степени каждой вершины этого графа равны 2, однако соответствующий автомат групповым не является (например, потому что $\varphi_0(q)$ не является перестановкой на Q).

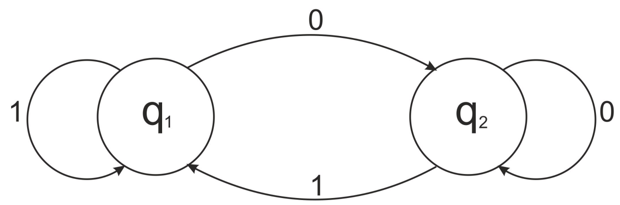

Рис. 1: Пример графа негруппового автомата.

Существование группового автомата

Утверждается, что любой граф, обладающий указанным свойством, можно разметить таким образом, чтобы ему соответствовал некоторый групповой автомат.

Теорема 1. *Теорема 1. Если $G = (Q, W)$ — ориентированный граф и $\forall\, q \in Q$ $deg\_in(q) = deg\_out(q) = m$, то существует такая функция $f : W \to A$, что $G = (Q, W, f)$ — граф некоторого группового автомата $V = (A, Q, \varphi)$, $|A| = m$.*

Построим неориентированный граф $G' = (Q', W')$ следующим образом:

$$Q' = \{q', q'' |\, q \in Q\},\ |Q'| = 2|Q|;$$
$$W' = \big\{\{q_1', q_2''\} | (q_1, q_2) \in W\big\},\ |W'| = |W|.$$

Так как $\forall\, q \in Q$ $deg\_in(q) = deg\_out(q) = m$, то G' — двудольный m- регулярный граф. Согласно теореме Кенига[2], любой регулярный двудольный граф имеет совершенное паросочетание, следовательно, $G' = G_1^* \cup G_1'$, где $G_1^* = (Q_1^*, W_1^*)$ — совершенное паросочетание, $G_1' = (Q', W_1')$ — двудольный $m-1$-регулярный граф. Аналогично, $G_1' = G_2^* \cup G_2'$, где $G_2^* = (Q_2^*, W_2^*)$ — совершенное паросочетание, $G_2' = (Q', W_2')$ — двудольный $m-2$-регулярный граф. Таким образом, получаем разложение графа G' на m совершенных паросочетаний $G_1^* = (Q_1^*, W_1^*), \ldots, G_m^* = (Q_m^*, W_m^*)$. Следовательно, граф G может быть представлен в виде объединения m подграфов $G_1, \ldots, G_m$, где $G_i = (Q, W_i)$, $W_i = \big\{(q_1, q_2) \in W | \{q_1', q_2''\} \in W_i^*\big\}$, при этом $\forall\, q \in Q$ $deg\_in(q) = deg\_out(q) = 1$. Рассмотрим следующую весовую функцию $f : W \to A$, $f(e) = a_i$, если $e \in W_i$. Тогда согласно утверждению 2, автомат, соответствующий диаграмме Мура $G = (Q, W, f)$, является групповым. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любой ориентированный граф $G = (Q, W)$, для которого выполнено условие $\forall\, q \in Q$ $deg\_in(q) = deg\_out(q) = m$, можно доопределить до графа некоторого группового автомата $V = (A, Q, \varphi)$, $|A| = m$ за время $O\big(|Q|^{\frac{3}{2}} * m^2\big)$.*

Требуется оценить время, необходимое для разложения графа $G' = (Q', W')$ на m совершенных паросочетаний (см. доказательство теоремы 1). Заметим, что если в графе существует совершенное паросочетание, то наибольшее паросочетание будет совершенным. Алгоритм Хопкрофта-Карпа [3] позволяет находить наибольшее паросочетание в двудольном графе $G = (Q, W)$ за время $O\big(\sqrt{|Q|} * |W|\big)$. Число вершин и ребер графа $G_i' = (Q', W_i')$ равно соответственно:

$$|Q'| = 2|Q|;$$
$$|W_i'| = \frac{1}{2} * \sum_{q' \in Q'} deg(q') = \frac{1}{2} * \big(|Q'| * (m - i)\big) = |Q| * (m - i).$$

Поэтому разложить граф $G' = (Q', W')$ на m совершенных паросочетаний можно за время:

$$\sum_{i=0}^{m-2} O\big(\sqrt{2|Q|} * |Q| * (m-i)\big) = \sum_{i=0}^{m-2} O\big(|Q|^{\frac{3}{2}} * (m-i)\big) = O\bigg(|Q|^{\frac{3}{2}} * \\ * \sum_{i=0}^{m-2}(m-i)\bigg) = O\bigg(|Q|^{\frac{3}{2}} * \frac{(m+2)*(m-1)}{2}\bigg) = O\Big(|Q|^{\frac{3}{2}} * m^2\Big).$$

Следствие доказано.

Отметим также, что приведенное разложение графа G на подграфы $G_1, \ldots, G_m$ аналогично разложению $2m$-регулярного графа на m реберно непересекающихся 2-факторов (см. теорему Петерсена [4]). Читатель, желающий более подробно узнать о свойствах групповых автоматов, может ознакомиться с ними в [5]. Автор выражает благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н. Бабину Дмитрию Николаевичу, за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] В.Б. Кудрявцев, С.В. Алёшин, А.С. Подколзин. Введение в теорию автоматов. Изд-во «Наука», М., 1985, 38 с.

[2] Kőnig, Dénes. Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére". Matematikai és Természettudományi Értesítő, 34, 1916, pp. 104–119.

[3] Hopcroft, Karp. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs, SIAM Journal on Computing, 2 (4), 1973, pp. 225–231.

[4] Л. Ловас, М. Пламмер. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. Изд-во “Мир”, М., 1998, 289 с.

[5] Бабин Д.Н., О полноте и выразимости автоматных функций относительно суперпозиции, монография, Макс Пресс, Москва, 2013.