

Алгоритмы перевода конца цепочки в заданную точку

Бергер И.О.

В работе исследована задача о цепочках.

Приведены результаты об области существования цепочек, полученных из данной переводом конца цепочки в заданную точку; оценки минимума евклидова расстояния между цепочками, получаемыми друг из друга переводом конца в заданную точку; возможное количество цепочек, полученных переводом конца в заданную точку и отличающихся минимальным количеством звеньев от данной цепочки; возможное количество цепочек, находящихся на минимальном расстоянии от данной и полученных переводом конца цепочки в заданную точку, для $n = 2$ и $n = 3$.

Описаны алгоритмы перевода конца цепочки в заданную точку: экспоненциальный алгоритм, перебирающий все возможные цепочки с шагом ε , линейный алгоритм, дающий примерное решение для евклидова расстояния, и линейный алгоритм, дающий точный ответ для расстояния Хэмминга и примерный для евклидова расстояния.

Ключевые слова: цепочка, алгоритм, верхние оценки, нижние оценки, евклидово расстояние, расстояние Хэмминга.

1. Определения и результаты

1.1. Введение

Одна из активно развивающихся областей науки - интеллектуальные системы ([1]-[19]). Одним из её разделов является управление роботами.

Представьте себе робота, который берет некоторые элементы, лежащие на столе, и перемещает их. У этого робота есть одна рука, имеющая несколько суставов, допустим, n . Такая рука - это $n + 1$ последовательно соединённых отрезков. Необходимо изучить, как может двигаться рука данного робота, и как можно быстро и с минимальными потерями энергии перевести конец руки робота в нужную точку.

1.2. Основные определения

Определение. Цепочка $A = A_0A_1\dots A_n$ длины n - это $n + 1$ точек $A_0, A_1, \dots, A_n, A_i \in \mathbb{R}^2, A_i \neq A_{i+1}$.

Мы представляем цепочку на плоскости как совокупность точек A_0, A_1, \dots, A_n и отрезков $A_0A_1, \dots, A_{n-1}A_n$.

Определение. Точка A_0 называется *центром цепочки*.

Определение. Отрезок $A_iA_{i+1} \forall i$ называется *звеном*.

Обозначение. $d_{i,i+1}^A = |A_iA_{i+1}|, i = 0..n - 1$ - длина звена.

Обозначение. $\alpha_{0,1}^A =$ - угол между вектором A_0A_1 и направлением оси OX . $\alpha_{i,i+1}^A = \overline{A_{i-1}A_i} \wedge \overline{A_iA_{i+1}}, i = 1..n - 1$ - угол между векторами $\overline{A_{i-1}A_i}$ и $\overline{A_iA_{i+1}}$.

Определение. Цепочка $B = B_0B_1\dots B_n$ получается из цепочки $A = A_0A_1\dots A_n$ перемещением конца цепочки, если $B_0 = A_0$ и $|A_iA_{i+1}| = |B_iB_{i+1}|, i = 0..n - 1$.

Обозначение. $\mathfrak{F}(A)$ - множество цепочек, получаемых перемещением конца цепочки из A .

Определение. Область допустимых положений конца цепочки $A = A_0A_1\dots A_n$ - множество точек $\mathfrak{D}(A) = \{P | P = B_n, B$ получена из A перемещением конца цепочки}.

Определение. Евклидово расстояние между цепочками $A = A_0A_1\dots A_n$ и $B = B_0B_1\dots B_n$: $\rho(A, B) = \sum_{i=0}^n |A_iB_i|$

Определение. Расстояние Хемминга между цепочками $A = A_0A_1\dots A_n$ и $B = B_0B_1\dots B_n$: $\rho'(A, B) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Ind}(A_i \neq B_i \text{ or } A_{i+1} \neq B_{i+1})$

Определение. Цепочка $B = B_0B_1\dots B_n$, удовлетворяющая условию U , удовлетворяет условию U и находится на минимальном расстоянии от цепочки $A = A_0A_1\dots A_n$, если $\rho(A, B) = \inf_{C \text{ satisf. } U} \rho(A, C)$

Определение. Цепочка $B = B_0B_1\dots B_n$, удовлетворяющая условию U , удовлетворяет условию U и отличается от цепочки $A = A_0A_1\dots A_n$ минимальным количеством звеньев, если $\rho'(A, B) = \inf_{C \text{ satisf. } U} \rho'(A, C)$

1.3. Метрическое пространство

Определение. Метрическое пространство есть пара (X, d) , где X — множество, а d — числовая функция, которая определена на декартовом произведении $X \times X$, принимает значения в множестве вещественных чисел, и такова, что

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества).

2. $d(x, y) = d(y, x)$ (аксиома симметрии).
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (аксиома треугольника или неравенство треугольника).

Функция $d(x, y)$ называется *метрикой*.

Утверждение. Множество цепочек длины n - метрическое пространство с метрикой $\rho(A, B)$.

Доказательство.

Первые два свойства очевидны. Третье вытекает из неравенства треугольника для точек на плоскости.

Конец доказательства.

Множество цепочек длины n не является метрическим пространством с метрикой $\rho'(A, B)$.

Пример. Возьмем три цепочки длины 2: A и B пересекаются по одному звену, B и C не пересекаются, A и C не пересекаются. Для них неравенство треугольника не выполняется.

1.4. Область допустимых положений конца данной цепочки (существование цепочки с концом в данной точке)

Теорема. $A = A_0A_1\dots A_n$ - цепочка длины n . Область допустимых положений конца цепочки $\mathfrak{D}(A) = \{P : \max\{d_{0,1}^A - (d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A), 0\} \leq |PA_0| \leq d_{0,1}^A + \dots + d_{n-1,n}^A\}$

Доказательство.

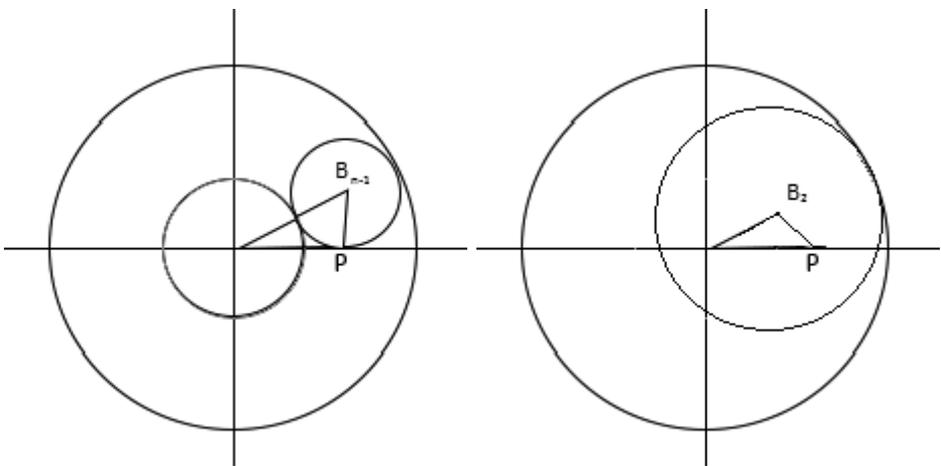


Рис 1. Область допустимых положений конца цепочки. Иллюстрация доказательства

Докажем утверждение для цепочки с центром в начале координат O . Для такой цепочки область равна $\mathfrak{D}(A) = \{P : \max\{d_{0,1}^A - (d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A), 0\} \leq |P| \leq d_{0,1}^A + \dots + d_{n-1,n}^A\}$. Для цепочек с центром в другой точке утверждение получается параллельным переносом.

Докажем, что для любой точки P из указанной области существует положение цепочки такое, что A_n и P совпадают.

Без ограничения общности будем считать, что точка P лежит на оси OX , иначе совершим поворот вокруг начала координат.

Случай $\max\{d_{0,1}^A - (d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A), 0\} > 0$: Проведём окружность радиуса $d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A$ так, чтобы она касалась окружностей $|x| = d_{0,1}^A + \dots + d_{n-1,n}^A$ и $|x| = \max\{d_{0,1}^A - (d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A), 0\}$ и точки P . Для этого проведём следующие две вспомогательные окружности: окружность с центром в точке P и радиуса $d_{n-1,n}^A$, и окружность с центром в начале координат и радиуса $\frac{d_{0,1}^A + \dots + d_{n-1,n}^A + \max\{d_{0,1}^A - (d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A), 0\}}{2} = d_{0,1}^A$. Эти окружности пересекаются в одной или двух точках, либо совпадают. Возьмём любую точку из их пересечения и примем за B_1 . Точки B_1, \dots, B_n лежат на отрезке PB_1 . Точка B_n совпадает с P . Точка B_0 - начало координат. Таким образом, мы построили искомую цепочку.

Случай $\max\{d_{0,1}^A - (d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A), 0\} = 0$: Проведём окружность радиуса $d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A$ так, чтоб она проходила через точку P и касалась окружности $|x| = d_{0,1}^A + \dots + d_{n-1,n}^A$. Центр этой окружности примем за B_1 . Точки B_1, \dots, B_n лежат на отрезке PB_1 . Точка B_n совпадает с P . Точка B_0 - начало координат.

Покажем, что для любой точки вне данной области цепочки не существует.

Пусть $|P| > d_{0,1}^A + d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A$. Это невозможно, т.к. $|A_0A_n| = |P| = |d_{0,1}^A \cos \beta_{0,1}^A + \dots + d_{n-1,n}^A \cos \beta_{n-1,n}^A| \leq d_{0,1}^A + d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A$, где $\beta_{i,i+1}^A$ - угол между отрезком iA_{i+1} и осью Ox .

Пусть $\max\{d_{0,1}^A - (d_{1,2}^A + \dots + d_{n-1,n}^A), 0\} > |P|$. Это противоречит теореме о том, что для любого треугольника ABC $|AC| < |AB| + |BC|$.

Конец доказательства.

Таким образом, для любой точки из области допустимых положений конца цепочки существует цепочка, полученная из данной перемещением конца в точку. Для остальных точек такой цепочки не существует.

1.5. Оценки

Теорема. $A = A_0A_1\dots A_n$ - цепочка длины n .

точка $P \in \mathfrak{D}(A)$
 $B : B_n = P, B_0 = A_0$

↓

$$\theta_A(P, i) = \max\{0, PA_i - \sum_{j=i}^{n-1} d_{i,j+1}^A\}$$

$$\rho(A, B) \geq \sum_{i=1}^n \theta_A(P, i)$$

Доказательство.

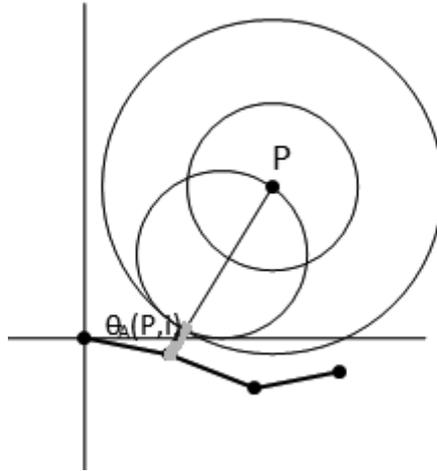


Рис 2. Величина $\theta_A(P, i)$

Фиксируем i .

Рассмотрим область допустимых положений конца цепочки C с началом в точке P и длины $n-1-i+1$, с длинами отрезков $d_{n-1,n}^A, d_{n-2,n-1}^A, \dots$. $\theta_A(P, i)$ - расстояние до ближайшей точки на $\mathfrak{D}(C)$. Меньше, чем $\theta_A(P, i)$, расстояние между точками A_i и B_i быть не может, так как таких цепочек B не существует. Значит, $|B_i A_i| \geq \theta_A(P, i)$.

Следовательно, $\sum_{i=1}^n |B_i A_i| \geq \sum_{i=1}^n \theta_A(P, i)$.

Конец доказательства.

Теорема. $A = A_0 A_1 \dots A_n$ - цепочка длины n .

точка $P \in \mathfrak{D}(A)$

$B : B_n = P, B_0 = A_0$

↓

$$\phi_A(P, i) = \max\{0, PA_i + \sum_{j=i}^{n-1} d_{i,j+1}^A\}$$

$$\rho(A, B) \leq \sum_{i=1}^n \phi_A(P, i)$$

Доказательство.

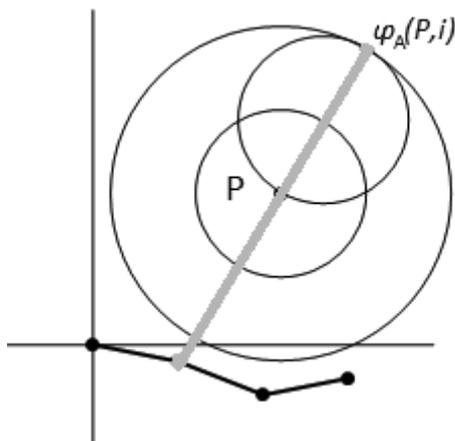


Рис 3. Величина $\phi_A(P, i)$

Фиксируем i .

Рассмотрим область допустимых положений конца цепочки C с началом в точке P и длины $n-1-i+1$, с длинами отрезков $d_{n-1,n}^A, d_{n-2,n-1}^A, \dots$. $\phi_A(P, i)$ - расстояние до дальней точки на $\mathfrak{D}(C)$. Больше, чем $\phi_A(P, i)$, расстояние между точками A_i и B_i быть не может, так как таких цепочек B не существует. Значит, $|B_i A_i| \leq \phi_A(P, i)$.

Следовательно, $\sum_{i=1}^n |B_i A_i| \leq \sum_{i=1}^n \phi_A(P, i)$.

Конец доказательства.

1.6. Количество цепочек, отличающихся минимальным количеством звеньев от данной и полученных перемещением конца в заданную точку

Теорема. $A = A_0A_1\dots A_n$ - цепочка длины n .

точка $P \in \mathfrak{D}(A) \Rightarrow$

\exists цепочка B , полученная переводом конца цепочки A в точку P и отличающаяся минимальным количеством звеньев от цепочки A .

Доказательство.

$\rho'(A, B)$ принимает конечное количество значений на множестве цепочек, полученных из данной перемещением конца. Значит, минимум достигается.

Конец доказательства.

$A = A_0A_1\dots A_n$ - цепочка длины n . Определим D_i следующим образом:

$$D_{n-1} = \mathfrak{D}(A_{n-1}A_n)$$

...

$$D_k = \mathfrak{D}(A_k\dots A_n) \setminus D_{n-1} \dots \setminus D_{k+1}$$

...

$$D_0 = \mathfrak{D}(A) \setminus D_{n-1} \dots \setminus D_1$$

Γ_k - граница D_k .

Лемма. $A = A_0A_1\dots A_n$ - цепочка длины n .

точка $P \in D_k$

$B = B_0B_1\dots B_n$ получена перемещением конца цепочки A в P .

Тогда:

$$\rho'(A, B) = n - k; A, B \text{ отличаются звеньями } A_kA_{k+1}, \dots, A_{n-1}A_n.$$

\Leftrightarrow

A, B отличаются минимальным количеством звеньев.

Доказательство.

\Rightarrow

$\rho'(A, B) \geq n - k$, т.к. $P \in D_k$ и любая цепочка, полученная перемещением конца цепочки A в P , отличается от A звеньями $A_kA_{k+1}, \dots, A_{n-1}A_n$. $\rho'(A, B) = n - k$, значит, B отличается от A минимальным количеством звеньев.

$\Leftarrow P \in D_k$, поэтому A и B отличаются звеньями $A_kA_{k+1}, \dots, A_{n-1}A_n$ ($|PA_{k+1}| > \sum_{i=k+1}^{n-1} |A_iA_{i+1}|$, то есть цепочки, где одно из этих звеньев совпадает, не существует) и только ими, потому что цепочки отличаются минимальным количеством звеньев. Значит, $\rho'(A, B) = n - k$

Теорема. $A = A_0A_1\dots A_n$ - цепочка длины n .

$P \in D_{n-1} \Rightarrow$ существует единственная цепочка, полученная из A перемещением конца в точку P и отличающаяся минимальным количеством звеньев.

$P \in D_{n-2} \setminus \Gamma_{n-2} \Rightarrow$ существует две таких цепочки.

$P \in D_k \setminus \Gamma_k \setminus \Gamma_{k-1} (k \neq n-1, n-2) \Rightarrow$ существует континуум таких цепочек.

$P \in \Gamma_k \Rightarrow$ - существует единственная такая цепочка.

Доказательство.

По лемме, цепочка, полученная из A перемещением конца в точку P и отличающаяся минимальным количеством звеньев, отличается только своими конечными звеньями.

Если $P \in D_{n-1}$, мы меняем положение только последнего звена, и мы можем сделать это единственным образом.

Если $P \in D_{n-2} \setminus \Gamma_{n-2}$, то проведём две окружности: с центром в точке P и радиусом $|A_{n-1}A_n|$, и центром в точке A_{n-2} и радиусом $|A_{n-2}A_{n-1}|$. Поскольку точка не принадлежит границе области, существует две точки пересечения окружностей, определяющих две цепочки.

Если $P \in D_k \setminus \Gamma_k \setminus \Gamma_{k-1} (k \neq n-1, n-2)$, мы можем построить континуум цепочек, так как дуга окружности с центром в точке P и радиусом $|A_{n-1}A_n|$ имеет континуум точек, для каждой из которых можно построить как минимум одну цепочку.

Если $P \in \Gamma_k$, то существует единственная цепочка, у которой последние звенья вытянуты в прямую.

1.7. Количество цепочек, находящихся на минимальном расстоянии от данной и полученных перемещением конца в заданную точку

Теорема. $A = A_0A_1\dots A_n$ - цепочка длины n .

точка $P \in \mathfrak{D}(A) \Rightarrow$

\exists цепочка B , полученная переводом конца цепочки A в точку P и находящаяся на минимальном расстоянии от цепочки A .

Доказательство.

Рассмотрим множество цепочек C , полученных из A перемещением в точку P .

$$C_0 = A_0;$$

$$C_1 \in \mathfrak{D}(A_0A_1) \cap \mathfrak{D}(PA_n\dots A_1);$$

...

$$C_i \in \mathfrak{D}(A_0A_1\dots A_i) \cap \mathfrak{D}(PA_n\dots A_i);$$

Множество таких цепочек - компакт, евклидово расстояние и расстояние между центрами масс - непрерывная функция, следовательно, на нём достигаются минимум и максимум. Следовательно, существует цепочка, минимально удалённая от данной и полученная перемещением конца данной цепочки в P .

Теорема доказана.

Теорема. $A = A_0A_1A_2$ - цепочка длины 2.

точка $P \in \mathfrak{D}(A)$.

Если $P \in$ прямой A_0A_1 , $P \notin$ границе $\mathfrak{D}(A)$, то \exists ровно две цепочки, получаемых из A перемещением конца цепочки в точку P , и находящихся на минимальном расстоянии от цепочки A .

Иначе \exists ровно одна такая цепочка.

Доказательство.

Проведём две окружности: Окружность с центром в точке A_0 и радиусом $d_{0,1}^A$; Окружность с центром в точке P и радиусом $d_{1,2}^A$.

Эти две окружности пересекаются по одной точке тогда и только тогда, когда $P \in$ границе $\mathfrak{D}(A)$. В этом случае существует только одна цепочка, получаемых из A перемещением конца цепочки в точку P , и находящихся на минимальном расстоянии от цепочки A . У неё оба звена находятся на одной прямой.

Иначе эти две окружности пересекаются по двум точкам M , N , и существуют ровно две цепочки, получаемые из A перемещением конца цепочки в точку P : A_0MP и A_0NP .

Нам требуется доказать, что $A_1M = A_1N \Leftrightarrow P \in$ прямой A_0A_1 .

Необходимость: $A_1M = A_1N$. OP - высота равнобедренных треугольников $\triangle OMN$ и $\triangle MNP$. $\triangle MNP$ построен на том же основании, и OP - также и его высота. Следовательно, $A_1 \in OP$.

Достаточность: В случае, если $P \in$ прямой A_0A_1 , все точки и прямые симметричны относительно прямой A_0A_1 . Поэтому $A_1M = A_1N$.

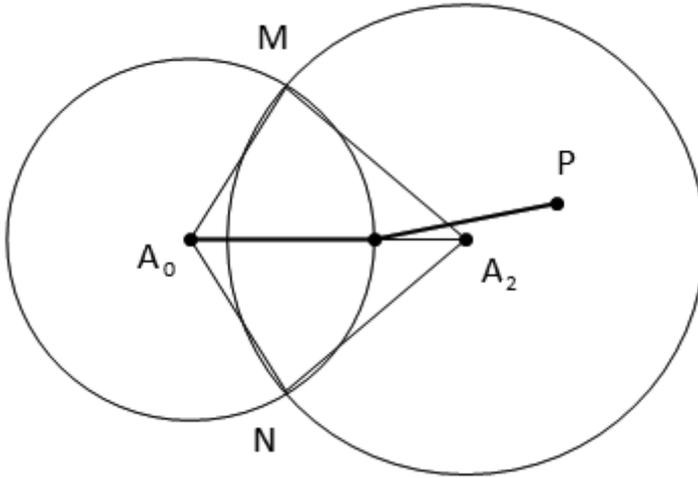


Рис. 4. Иллюстрация доказательства теоремы о количестве цепочек, полученных из данной перемещением в заданную точку и находящихся на минимальном расстоянии от данной.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим цепочки длины 3.

Пусть дана цепочка $A = A_0A_1A_2A_3$ и точка $P \in \mathfrak{D}(A)$. Мы будем рассматривать только цепочки с центром в начале координат и со звеном A_0A_1 , лежащим на положительной части оси OX , потому что все остальные цепочки получаются из таких параллельным переносом и поворотом.

Построим цепочку B , которая получается из цепочки A перемещением конца в точку P .

Введём параметр t , обозначающий угол наклона B_0B_1 к оси OX . За t_0 обозначим угол наклона A_0A_1 .

$$\begin{cases} x_{B_1} = d_{0,1}^A \cos t \\ y_{B_1} = d_{0,1}^A \sin t \end{cases}$$

Попробуем выразить положение точки A_2 через параметр t . Эта точка находится на пересечении следующих окружностей:

$$\begin{cases} (x - x_{B_1})^2 + (y - y_{B_1})^2 = d_{1,2}^A \\ (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 = d_{2,3}^A \end{cases}$$

Вычтем одно выражение из другого. Квадраты x и y сократятся и получится выражение:

$$y = a(t) + b(t)x$$

где

$$a(t) = \frac{(d_{1,2}^A)^2 - (d_{2,3}^A)^2 - x_{B_1}(t)^2 + x_P^2 - y_{B_1}(t)^2 + y_P^2}{-2y_{B_1}(t) + 2y_P}$$

$$b(t) = \frac{-2x_{B_1}(t) + 2x_P}{-2y_{B_1}(t) + 2y_P}$$

Подставим $y = a(t) + b(t)x$ в одно из изначальных уравнений. Получим:

$$A(t)x^2 - B(t)x - C(t) = 0$$

где

$$A(t) = 1 + b(t)^2$$

$$B(t) = 2x_{B_1}(t) + 2a(t)b(t) - 2b(t)y_{B_1}(t)$$

$$C(t) = (d_{1,2}^A)^2 - x_{B_1}(t)^2 - y_{B_1}(t)^2 - a(t)^2 + 2a(t)y_{B_1}(t)$$

Дискриминант равен:

$$D(t) = B(t)^2 + 4A(t)C(t)$$

Уравнения имеют два решения, которые могут совпадать:

$$\begin{cases} x_{B_2}'(t) = \frac{B(t) + \sqrt[2]{D(t)}}{2A(t)} \\ y_{B_2}'(t) = a(t) + b(t)x \end{cases} \quad \begin{cases} x_{B_2}''(t) = \frac{B(t) - \sqrt[2]{D(t)}}{2A(t)} \\ y_{B_2}''(t) = a(t) + b(t)x \end{cases}$$

Это координаты, которые может иметь точка B_2 в зависимости от параметра t .

$$Dist_1^A(t) = |A_1B_1(t)| + |A_2B_2'(t)| + |A_3P|$$

$$Dist_2^A(t) = |A_1B_1(t)| + |A_2B_2''(t)| + |A_3P|$$

$Dist_{min}^A(t) = \min\{Dist_1^A(t), Dist_2^A(t)\}$ - расстояние между цепочкой A и цепочкой, получаемой из A перемещением конца цепочки в точку P и находящейся на минимальном расстоянии от A при данном t .

Гипотеза. $A = A_0A_1A_2A_3$ - цепочка длины 3. $P \in \mathfrak{D}(A)$.

1. Если A_0, A_1, A_2 лежат на одной прямой и точка P лежит на этой же прямой, но не на границе $\mathfrak{D}(A)$, то существует ровно два минимума $Dist_{min}^A(t)$, расположенных симметрично относительно t_0 ;

2. Иначе существует ровно один минимум $Dist_{min}^A(t)$.

Гипотеза подтверждается эмпирически построением соответствующих графиков программой в Wolfram Mathematica.

Теорема. $A = A_0A_1A_2A_3$ - цепочка длины 3. $P \in \mathfrak{D}(A)$.

Выполняется Гипотеза \Rightarrow Существует не больше чем две цепочки, полученные переводением конца цепочки A в точку P и находящиеся на минимальном расстоянии от A .

Доказательство.

Разберём два случая:

1. Существует ровно один минимум $Dist_{min}^A(t)$. Тогда существует как максимум две цепочки длины 2 с центром в точке B_1 , оканчивающиеся в P , и со звеньями длины $d_{1,2}^A$ и $d_{2,3}^A$. Поэтому всего существует не более двух цепочек, соответствующих условию.

2. Существует два симметричных минимума $Dist_{min}^A(t)$. Этим минимумами соответствуют точки B_2' и B_2'' . Для каждой из этих точек существует ровно одна цепочка длины 2 с центром в ней, оканчивающиеся в P , и со звеньями длины $d_{1,2}^A$ и $d_{2,3}^A$, так как точка P не лежит на прямой, содержащей её первое звено. Поэтому всего существует не более двух цепочек, соответствующих условию.

Теорема доказана.

Пример. В этом случае есть две симметричные цепочки, получаемые из A перемещением конца цепочки в точку P и находящиеся на минимальном расстоянии от A .

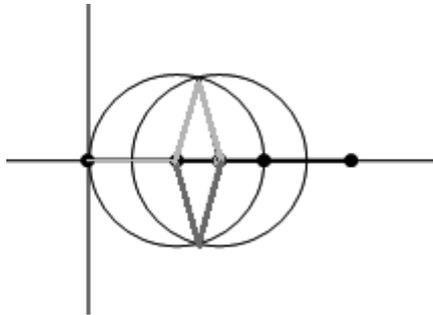


Рис.5. Пример цепочек, полученных перемещением конца цепочки и находящихся на минимальном расстоянии от данной.

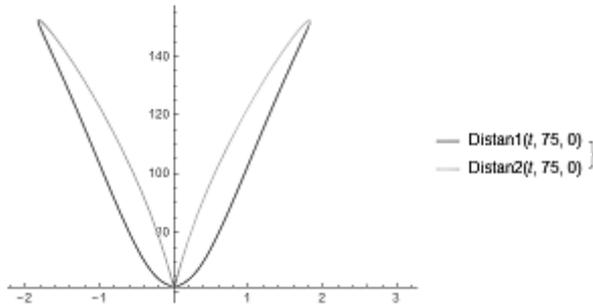


Рис.6. Функции $Dist_1^A(t), Dist_2^A(t)$ для этих цепочек.

Пример. В этом случае соответствующие цепочки не симметричны.

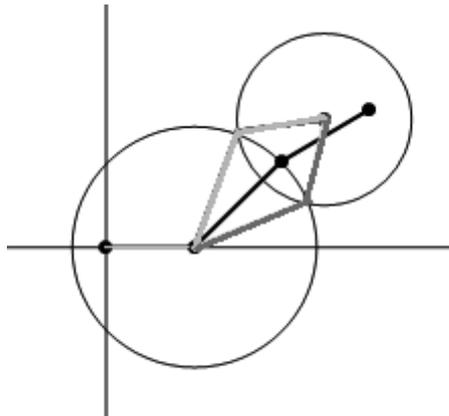


Рис.7. Пример цепочек, полученных перемещением конца цепочки и находящихся на минимальном расстоянии от данной.

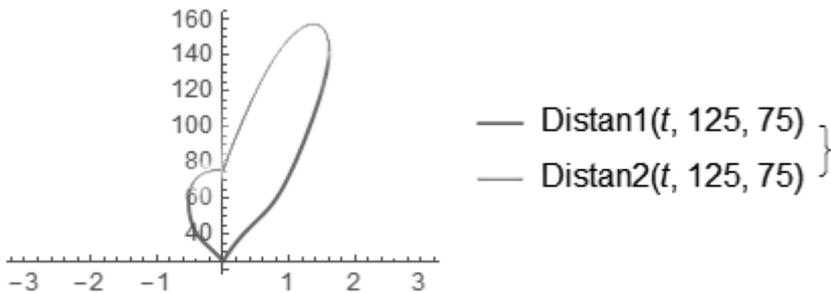


Рис.8. Функции $Dist_1^A(t), Dist_2^A(t)$ для этих цепочек.

1.8. Неэквивалентность задач минимизации расстояния и углового расстояния

Определение. Угловое расстояние между цепочками $A = A_0A_1\dots A_n$ и $B = B_0B_1\dots B_n$: $\rho_\alpha(A, B) = \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_{i,i+1}^A - \alpha_{i,i+1}^B|$

Пусть дана цепочка A . Сводится ли задача минимизации функционала $\rho_\alpha^A(B) = \rho_\alpha(A, B)$ к минимизации функционала $\rho^A(B) = \rho(A, B)$?

Пример. Дана цепочка из большого количества звеньев, и её конец переходит в точку P путём поворота первого звена на небольшой угол. При этом все звенья сместятся на некоторое расстояние, которое в сумме будет довольно большим, так как звеньев много. Очевидно, чтоб минимизировать расстояние между цепочками, нужно оставить на месте почти все звенья и повернуть несколько последних. Но в этом случае звенья отклоняются на достаточно большой угол.

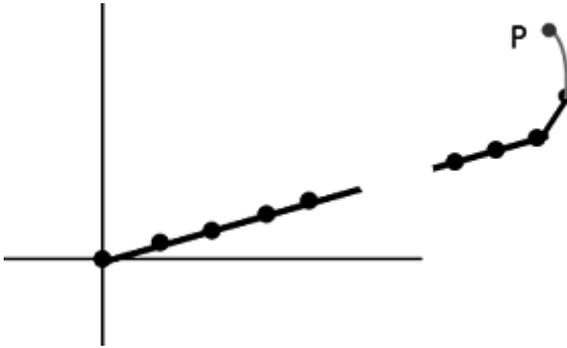


Рис.9. Пример цепочки, для которой задачи о минимизации углового расстояния и евклидова расстояния не эквивалентны.

Таким образом, задачу об минимизации углового расстояния следует рассматривать отдельно.

2. Алгоритмы

2.1. Приближённый алгоритм для евклидова расстояния

Пусть дана цепочка A длины l и точка P . Этот алгоритм перебирает возможные цепочки, получаемые из A перемещением конца в точку P , с шагом угла ε . Из них он выбирает находящуюся на наименьшем евклидовом расстоянии от A .

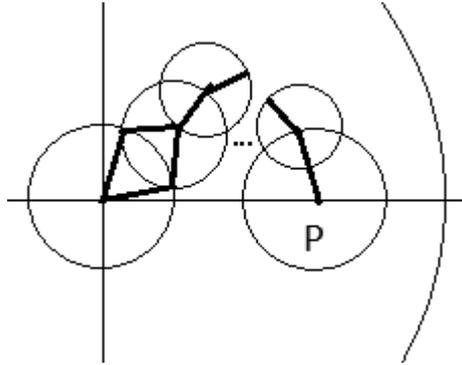


Рис.10. Иллюстрация одной итерации приближённого алгоритма.

$\text{BuildChainLength2}(P_1, d_1, P_2, d_2)$ - функция, выдающая пару точек A и B таких, что P_1AP_2 и P_1BP_2 - цепочки с длинами звеньев d_1 и d_2 .

$\text{InAllowedArea}(A, n, P)$ - функция, выдающая *true*, если P находится в области допустимых положений конца цепочки A , и *false* иначе.

$r(A, B)$ - евклидово расстояние между цепочками.

$A1(A, n, P, \varepsilon)$

```

if !InAllowedArea(A, n, P)
    return (∞, ∞)..(∞, ∞)

```

```

minDist = ∞

```

```

minChain=(∞, ∞)..(∞, ∞)

```

```

 $B_n = P$ 

```

```

 $B_0 = A_0$ 

```

```

for  $t = (0, 0, \dots, 0)$  to  $(2 * \pi, 2 * \pi, \dots, 2 * \pi)$  with step  $(0, 0, \dots, \varepsilon)$ 

```

```

    for  $i = 1$  to  $n - 2$ 

```

```

         $B_i.x = B_{i-1}.x + d_{i-1,i}^A \cos t$ 

```

```

         $B_i.y = B_{i-1}.y + d_{i-1,i}^A \sin t$ 

```

```

    { $P_1, P_2$ }=BuildChainLength2( $B_{n-2}, d_{n-2,n-1}^A, P, d_{n-1,n}^A$ )

```

```

    if  $P_1A_1 < P_2A_2$ 

```

```

         $B_{n-1} = P_1$ 

```

```

    else

```

```

         $B_{n-1} = P_2$ 

```

```

    minDist=r(A, B)

```

```

    minChain=B

```

Всего надо перебрать $2\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^{n-2}$ цепочек.

Алгоритм имеет сложность $O(e^n)$.

2.2. Линейный алгоритм

Данный алгоритм на каждом шагу выбирает точку B_i , максимально приближенную к A_i .

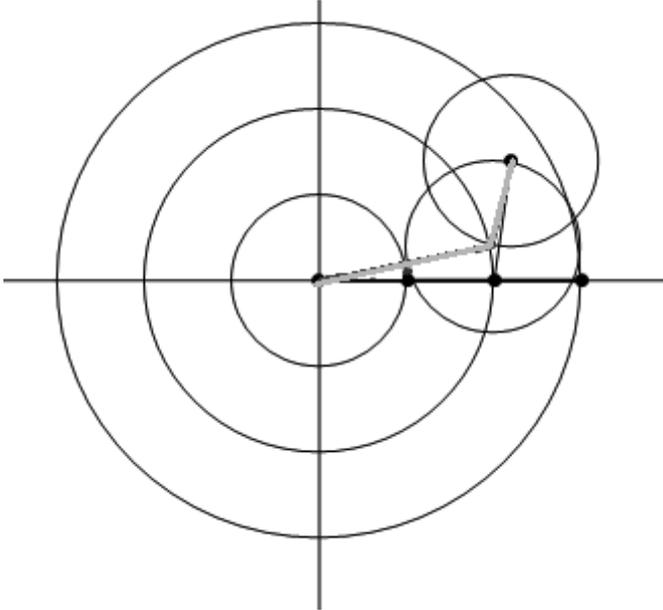


Рис.11. Решение, полученное с помощью линейного алгоритма.

```

A2( $A, n, P$ )
  if !InAllowedArea( $A, n, P$ )
    return  $(\infty, \infty)..(\infty, \infty)$ 
   $B_n = P$ 
   $B_0 = A_0$ 
  for  $i = n - 1$  to 2
     $Area_i =$  (окружность с центром в  $B_{i+1}$ , радиуса  $d_{i,i+1}^A \cap$ 
 $\mathfrak{D}(A_0A_1\dots A_i)$ )
     $B_i = \arg \min_{C \in Area_i} |CA_i|$ 
     $\{P_1, P_2\} = \text{BuildChainLength2}(B_2, d_{1,2}^A, A_0, d_{0,1}^A)$ 
    if  $|P_1A_1| < |P_2A_1|$ 
       $B_1 = P_1$ 
    else
       $B_1 = P_2$ 
  return  $B$ 

```

Сложность алгоритма - $O(n)$.

Сравним алгоритмы A1 и A2 с помощью программы. На следующих рисунках слева изображены цепочки, а справа - область таких P , что цепочки, получаемые в результате алгоритмов, совпадают с небольшой погрешностью:

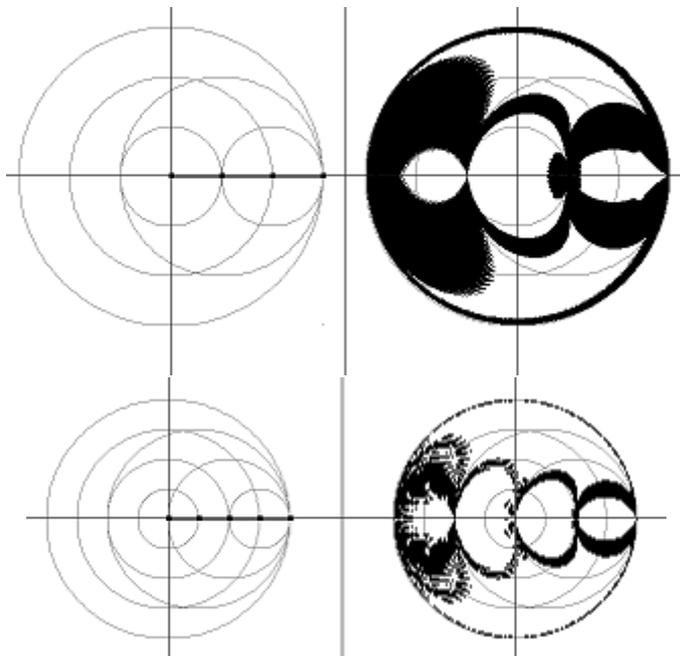
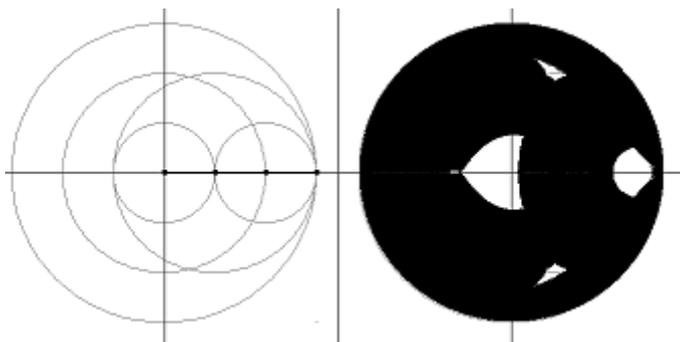


Рис.13. Область, где результаты работы алгоритмов A1 и A2 совпадают с небольшой погрешностью.

На следующих рисунках изображена область, на которой точки цепочек находятся в среднем на расстоянии половины звена друг от друга, то есть на небольшом расстоянии:



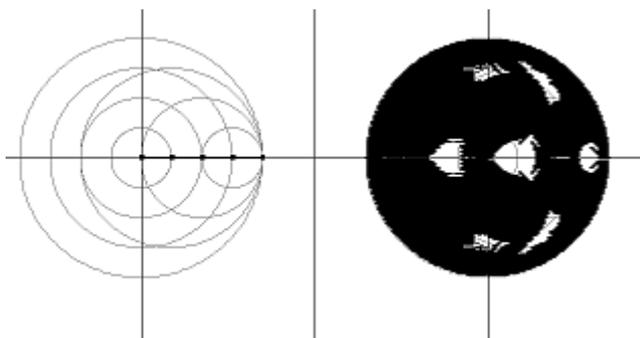
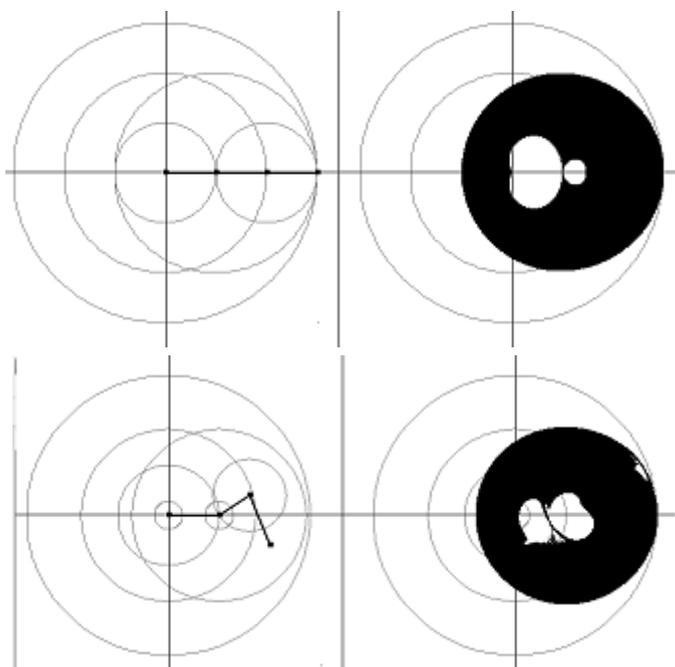


Рис.13. Область, где точки результатов работы алгоритмов А1 и А2 находятся на расстоянии половины звена в среднем.

2.3. Алгоритм для расстояния Хэмминга

Для начала внимательно рассмотрим результат работы алгоритма А1. Нарисуем область, в которой первое или первое и второе звенья остаются на месте:



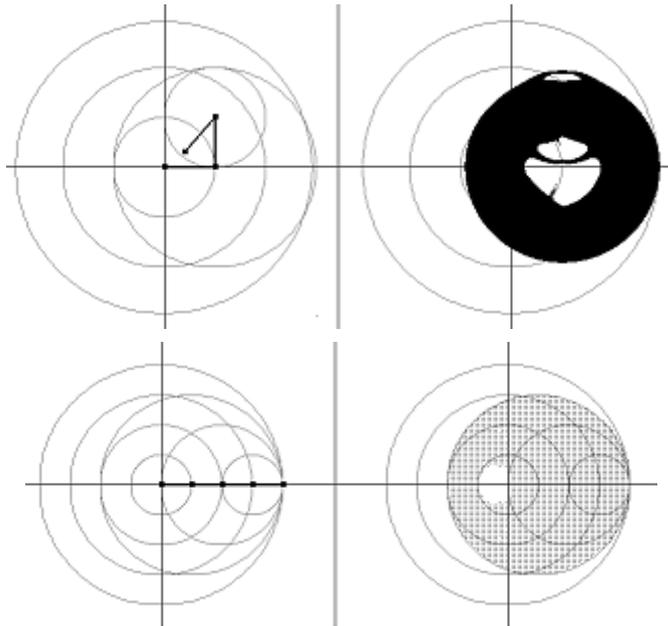


Рис.14. Область, где алгоритм A2 оставляет на месте первое звено.

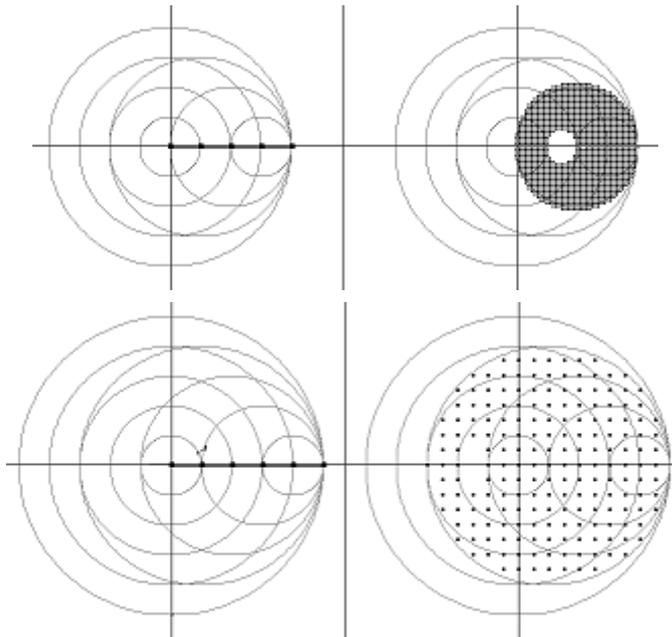


Рис.15. Область, где алгоритм A2 оставляет на месте первое и второе звено.

Как несложно заметить, эта область - почти вся область допустимых положений конца цепочки с центром в A_1 или A_2 . Причём с ростом n эти области всё сильнее совпадают.

Попытаемся составить алгоритм, которые оставляет максимальное количество цепей на месте.

Обратим внимание, что на области вне области допустимых положений конца цепочки с центром в A_1 или A_2 алгоритм A2 достаточно эффективен.

Алгоритм оставляет максимально возможное количество звеньев. Оставшиеся звенья он находит по алгоритму A2.

$\text{Intersection}(P_1, r_1, P_2, r_2)$ - выдаёт точки пересечения двух окружностей.

```

A3(A, n, P)
  if !InAllowedArea(A, n, P)
    return ( $\infty$ ,  $\infty$ )..( $\infty$ ,  $\infty$ )
   $B_n = P$ 
   $B_0 = A_0$ 
  for  $i = n - 1$  to 1
    if InAllowedArea( $A_i \dots A_n, n, P$ )
      break
  for  $j = 0$  to  $i$ 
     $B_j = A_j$ 
   $B_{i+1} \dots B_n = A2(A_{i+1} \dots A_n, n - i, P)$ 
  return B

```

Сложность алгоритма - $O(n)$.

Теорема. Алгоритм для расстояния Хэмминга минимизирует расстояние Хэмминга.

Доказательство.

Построенная цепочка отличается от данной только совими последними звеньями, минимальным возможным их количеством. По лемме из параграфа про количество цепочек, отличающихся минимальным количеством звеньев, она отличается от данной минимальным количеством звеньев, т.е. она минимизирует расстояние Хэмминга между цепочками.

Теорема доказана.

Сравним результаты алгоритмов A1 и A3.

Область, где результаты работы алгоритмов находятся на небольшом расстоянии:

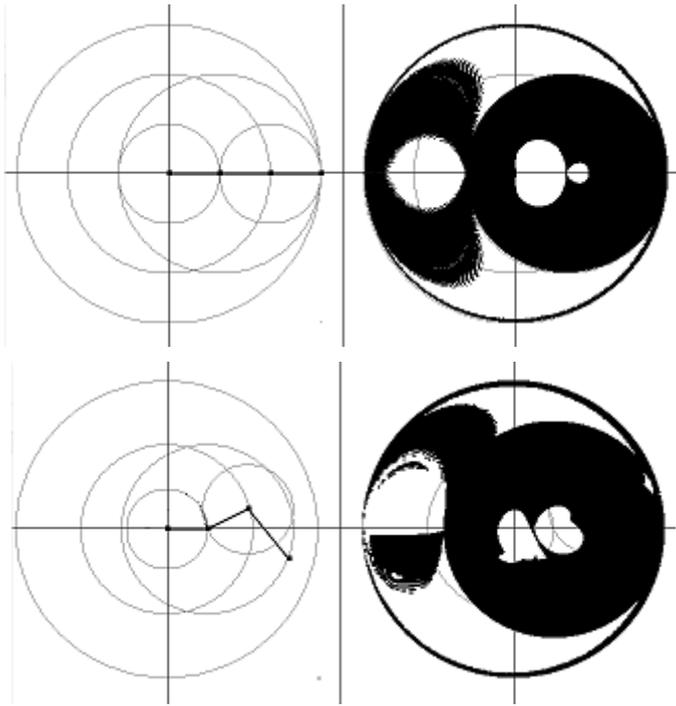
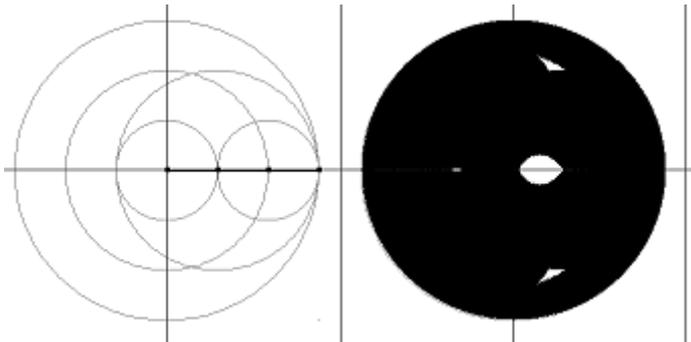


Рис.16. Область, где результаты работы алгоритмов А1 и А3 совпадают с небольшой погрешностью.

Область, где точки результатов находятся друг от друга в среднем на расстоянии половины звена:



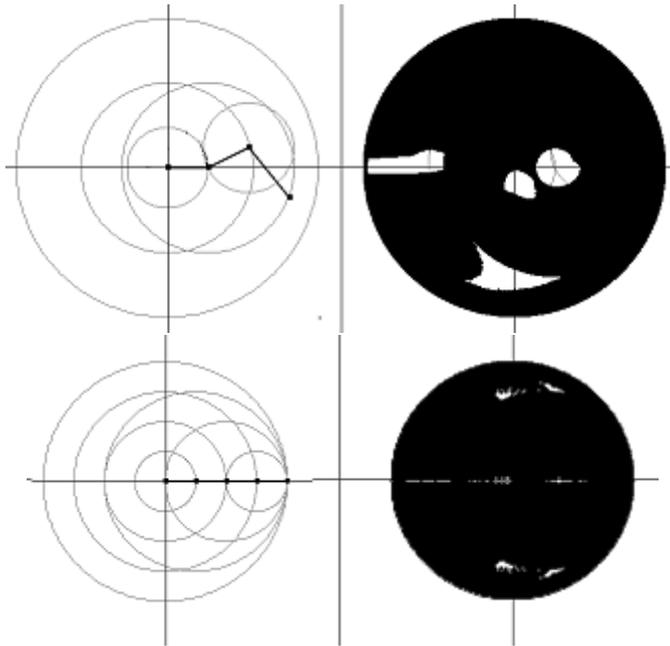


Рис.17. Область, где точки результатов работы алгоритмов А1 и А3 находятся на расстоянии половины звена в среднем.

Судя по наблюдаемым данным, алгоритм А3 для данных цепочек эффективней, чем алгоритм А2.

Список литературы

- [1] Титова Е.Е. Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 153–180.
- [2] Иванов И.Е. О некоторых свойствах автоматов с магазинной памятью // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 243–252.
- [3] Кучеренко И.В. О минимизации монофункциональных классов бинарных клеточных автоматов с неразрешимым свойством обратимости. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 227–295.
- [4] Якимец К.К. Об инвариантности характеристик конфигураций однородных структур. — 2014. — Т. 18, вып. 4. — С. 347–356.

- [5] Иванов И.Е. О сохранении периодических последовательностей автоматами с магазинной памятью с однобуквенным магазином // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 145–160.
- [6] Летуновский А.А. Выразимость линейных автоматов относительно расширенной суперпозиции // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 161–170.
- [7] Гербус В.Г. О связи функций автомата и автоматной функции // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 109–116.
- [8] Миронов А.М. Критерий реализуемости функций на строках вероятностными автоматами Мура с числовым выходом // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 149–160.
- [9] Терехина И.Ю. Модель невлияния для квантовых автоматов // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 2. — С. 183–190.
- [10] Бабин Д.Н., Летуновский А.А. О возможностях суперпозиции, при наличии в базисе автоматов фиксированной добавки из булевых функций и задержки // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 71–78.
- [11] Бабин Д.Н. Автоматы с суперпозициями, пример нерасширяемости до предположного класса // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 87–94.
- [12] Э.Э.Гасанов, А.А.Мастихина Прогнозирование общерегулярных сверхсобытий автоматами // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 127–154.
- [13] А.А.Часовских. Критериальные системы в классах линейно-автоматных функций над конечными полями // Интеллектуальные системы. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 195–207.
- [14] Гасанов Э.Э., Ефремов Д.В. Фоновый алгоритм решения двумерной задачи о доминировании // Интеллектуальные системы. — 2014. — Т. 18, вып. 3. — С. 133–158.
- [15] Е. М. Перпер. Нижние оценки временной и объёмной сложности задачи поиска подслово // Дискретная математика, 2014, том 26:2, 58–70.

- [16] Черемисин О. В. Об активности схем из клеточных элементов, реализующих систему всех конъюнкций // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15, вып. 2. — С. 113–122
- [17] Калачев Г. В. Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, № 1. — С. 49–74.
- [18] Калачев Г. В. Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2014. — Т. 18, № 2. — С. 279–322.
- [19] Калачев Г. В. Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2016. — Т. 20, № 2. — С. 203–266.

Algorithms of moving of the end of chain to the given point Berger I.O.

The problem of chains is investigated.

Results on the existence of chains obtained from given chain by moving of the end of the chain to a given point; Bounds of the minimum of the Euclidean distance between chains obtained from each other by moving of the end to a given point; possible number of chains obtained by moving the end to a given point and differing by the minimum number of elements from a given chain; the possible number of chains that are at the minimum distance from the given and obtained by moving the end of the chain to a given point, for $n = 2$ and $n = 3$.

Algorithms for moving the end of a chain to a given point are described: an exponential algorithm that sorts out all possible chains with step ε , a linear algorithm giving an approximate solution for Euclidean distance, and a linear algorithm giving an exact answer for the Hamming distance and approximate for the Euclidean distance.

Keywords: chain, algorithm, upper bounds, lower bounds, Euclidean distance, Hamming distance.