Персептронный алгоритм и линейное программирование

Носов М.В.

В работе персептронный алгоритм применён для решения задачи линейного программирования с непустой внутренной областью.

Ключевые слова: персептронный алгоритм, линейное программирование.

Пусть задача линейного программирования сформулирована для целых коэффициентов в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} \geq 0, \\ \hfill \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0} \geq 0, \end{cases}$$

$$b_1x_1 + \ldots + b_nx_n \to max.$$

С использованием персептронного алгоритма исследуем случай совместности системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} > 0, \\ \hfill \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0} > 0. \end{cases}$$

Введём положительную переменную и получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10}x_{n+1} > 0, \\ \hfill \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0}x_{n+1} > 0, \\ \hfill x_{n+1} > 0. \end{cases}$$

Совместность последней системы эквивалентна существованию целых переменных, удовлетворяющей следующей системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10}x_{n+1} \geq 1, \\ \hfill \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0}x_{n+1} \geq 1, \\ \hfill x_{n+1} \geq 1. \end{cases}$$

Из теории линейного программирования следует, что существует квадратный невырожденный минор, для которого совместна система равенств, остальные переменные равны 0, и такой набор даст решение системы неравенств. Определитель минора - целое число, по правилу Крамера и неравенству Адамара следует, что существует решение $(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0)$, удовлетворяющее условию:

$$|x_i^0| = \left|\frac{\triangle_i}{\triangle}\right| \leq |\triangle_i| \leq \left(\max_{pq} |a_{pq}| \cdot \sqrt{min(n,m)+1}\right)^{min(n,m)+1}, \quad i = 1, \ldots, n, n+1.$$

Значит для точек $A_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{10}), \ldots, A_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn}, a_{m0}), A_{m+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ существует плоскость, задаваемая уравнением $x_1^0 x_1 + x_n^0 x_n + x_{n+1}^0 x_{n+1} = 0$, от которой точки $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$ удалены на расстояние δ, которое удовлетворяет следующему условию:

$$\delta \geq \min_i \frac{|a_{i1}x_1^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 + a_{i0}x_{n+1}^0|}{\sqrt{(x_1^0)^2 + \ldots + (x_{n+1}^0)^2}} \geq$$

$$\geq \min_i \frac{|a_{i1}\triangle_1 + \ldots + a_{in}\triangle_n + a_{i0}\triangle_{n+1}|}{\sqrt{\triangle_1^2 + \ldots + \triangle_n^2 + \triangle_{n+1}^2}} \geq$$

$$\geq \left(\max_{pq} |a_{pq}| \cdot \sqrt{min(n,m)+1}\right)^{-min(n,m)-1} \cdot (n+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, по теореме Новикова вопрос о существовании внутренней точки области решается циклическим поступлением на вход персептронного алгоритма точек $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$ с начальным нулевым вектором и числом исправлений не более

$$\max_{pq} |a_{pq}|^2 \cdot (n+1)^2 \left(\max_{pq} |a_{pq}|^2 \cdot (min(n,m)+1)\right)^{min(n,m)+1}.$$

При положительном решении вопроса о внутренней точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0)$ системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10}x_{n+1} > 0, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0}x_{n+1} > 0, \\ x_{n+1} > 0, \end{cases}$$

определяем величину

$$f^0 = b_1 \frac{x_1^0}{x_{n+1}^0} + \ldots + b_n \frac{x_n^0}{x_{n+1}^0}$$

и формируем новую систему неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} > 0, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0} > 0, \\ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n - f^0 > 0. \end{cases}$$

Вводим новую переменную x_{n+1}, получаем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10}x_{n+1} > 0, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0}x_{n+1} > 0, \\ x_{n+1} > 0, \\ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n - f^0x_{n+1} > 0. \end{cases}$$

Проводим персептронную процедуру для точек $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}, A^0_{m+2}$, где $A^0_{m+2} = (b_1, \ldots, b_n, -f^0)$ с начальным вектором $(x^0_1, \ldots, x^0_n, x^0_{n+1})$ и находим вектор $(x^1_1, \ldots, x^1_n, x^1_{n+1})$ и т.д. Теперь после нахождения очередного вектора $(x^j_1, \ldots, x^j_n, x^j_{n+1})$, находим величину

$$f^j = b_1 \frac{x^j_1}{x^j_{n+1}} + \ldots + b_n \frac{x^j_n}{x^j_{n+1}}$$

и строим новую систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10}x_{n+1} > 0, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0}x_{n+1} > 0, \\ x_{n+1} > 0, \\ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n - f^jx_{n+1} > 0. \end{cases}$$

Проводим персептронную процедуру для точек $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}, A^j_{m+2}$, где $A^j_{m+2} = (b_1, \ldots, b_n, -f^j)$ с начальным вектором $(x^j_1, \ldots, x^j_n, x^j_{n+1})$.

Очевидно, что последовательность $\{f^j\}$ возрастающая. Покажем, что если она сходится, то сходится к f^* - максимуму целевой функции исходной задачи. Допустим, что это не так и возрастающая последовательность сходится к $\hat{f}$, причём $\hat{f} < f^*$. Следовательно, в области, задаваемой системой

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{10} > 0, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m0} > 0, \\ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n - \hat{f} > 0, \end{cases}$$

найдётся внутренняя точка $(y_1, \ldots, y_n)$, что $b_1y_1+\ldots+b_ny_n > \hat{f}$. Возьмём бесконечную последовательность векторов $\{A_1, \ldots, A_{m+1}, A^0_{m+2}, A^2_{m+2}, \ldots\}$, как множество оно ограничено. Возьмём вектор $Y = (y_1, \ldots, y_n, 1)$, для каждого из первых $m+1$ векторов, указанного множества скалярное произведение на вектор Y очевидно строго больше 0, а для остальных векторов имеем

$$(Y, A^j_{m+2}) = b_1y_1 + \ldots + b_ny_n - f^j =$$
$$(b_1y_1 + \ldots + b_ny_n - \hat{f}) + (\hat{f} - f^j) > b_1y_1 + \ldots + b_ny_n - \hat{f} > 0.$$

Таким образом, последовательность векторов удовлетворяет теореме Новикова, следовательно если их подавать на вход персептронного алгоритма, то количество исправлений должно быть ограничено, а это противоречит построению последовательности.Следовательно предположение неверно и возрастающая последовательность $\{f^j\}$ если сходится, то к максимальному значению.

Пример(из Галеев Э.М. "Оптимизация:Теория, примеры,задачи")

$$\begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - x_3 + 4 \geq 0, \\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$15x_1 + 27x_2 + 20x_3 \to \max.$$

Точное решение задачи:

$$x_1 = \frac{10}{33} = 0,303030...,$$
$$x_2 = \frac{14}{33} = 0,424242...,$$
$$x_3 = 0,$$
$$\max(15x_1 + 27x_2 + 20x_3) = 16.$$

При решением представленным алгоритмом первая внутренняя точка была найдена через 14 циклов по всем 5 неравенствам. Затем было проведено 15 циклов по параметру j, т.е. 15 раз определялась внутренняя точка области. Статистика представлена в таблице

Номер цикла	Число исправлений	Текущий максимум
1	161	13.2034
2	670	14.2322
3	948	14.9
4	3480	15.3198
5	7419	15.6032
6	23129	15.7468
7	55051	15.8515
8	170715	15.90558
9	373437	15.9403
10	963769	15.9633
11	2650496	15.9768
12	6316983	15.9856
13	16736385	15.9909
14	41069869	15.9944
15	112748541	15.9965

Решение задачи

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.302649, \\ x_2 &= 0.424316, \\ x_3 &= 0.000014817, \\ \max(15x_1 + 27x_2 + 20x_3) &= 15.99656334 \end{aligned}$$

Perceptron algorithm and linear programming
Nosov M.V.

In the work perceptron algorithm is applied to solve linear programming problem with a nonempty interior region.

Keywords: perceptron algorithm, linear programming.