

Проблема полноты в классах линейных автоматов

Часовских А.А.

Рассматриваются классы линейных автоматов над конечными полями с операциями композиции (суперпозиции и обратной связи). Ранее для этих классов получен алгоритм проверки полноты конечных подмножеств. В случае простого поля найдены все предполные классы, множество которых является счетной приведенной критериальной системой. В общем случае ранее было построено множество замкнутых классов, являющееся критериальной системой, включающее семейство классов, порожденных максимальными подполями в трансцендентном расширении рассматриваемого конечного поля. Для простых полей все классы этого семейства поглощались другими классами из приведенной критериальной системы. Поэтому в настоящей работе оно исследуется в случае конечных полей, не являющихся простыми. Оказалось, что часть элементов семейства поглощается и в этом случае, но также среди его элементов существуют предполные классы, являющиеся конечно-порожденными и не содержащиеся среди предполных классов других семейств.

Ключевые слова: линейный автомат, сумматор, задержка, обратная связь, операции композиции, алгоритм проверки полноты, предполный класс.

Изучение выразительных свойств в классах всех конечных автоматов \mathfrak{F}_2 по операциям композиции затруднено в связи континуальностью числа предполных подклассов [1], а также алгоритмической неразрешимостью проблемы полноты [2] и аппроксимационной полноты [3]. Высокую сложность задач выразимости в указанном классе подчеркивают результаты С.В. Алешина, полученные при использовании операций суперпозиции как в общем случае, так и для одноместных автоматов [4, 5]. Д.Н. Бабиным в [6] были найдены все классы Поста, использование которых приводит к разрешимости проблемы полноты в классе конечных автоматов. В настоящей работе изучаются проблема полноты в классах \mathfrak{L}_k линейных автоматов над конечными полями, состоящими из k

элементов. Класс \mathfrak{L}_2 является содержательным подклассом класса \mathfrak{F}_2 , для которого проблемы полноты конечных подмножеств алгоритмически разрешима. В работе [7] была получена приведенная критериальная система, состоящая из всех предполных классов, для классов \mathfrak{L}_p , где p – простое число. В дальнейшем [8] была получена критериальная система замкнутых классов \tilde{J}_k для \mathfrak{L}_k , где $k = p^m$, p – простое число, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. В настоящей работе рассматриваются классы B_q из \tilde{J}_k , порожденные максимальными подполями трансцендентных расширений конечных полей. Показано, что среди рассматриваемых классов есть как предполные классы, не совпадающие с классами из других серий, так и классы, которые строго содержатся в некоторых классах множества \tilde{J}_k . Найдены некоторые свойства предполных классов из $\{B_q\}$.

В соответствии с опубликованными ранее результатами [9], исследование класса линейных автоматов сводится к изучению классов линейно-автоматных (л.-а.) функций. Л.-а. функция осуществляет отображение из декартовой степени множества формальных степенных рядов $R_k(\xi)$ над полем E_k в $R_k(\xi)$ в соответствии с равенством:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i + \mu_0,$$

где μ_i – некоторые элементы из $R_k(\xi)$, последовательности коэффициентов которых являются периодическими (с предпериодом). Как и ранее, в работе [9], для этой функции через $U(f)$ будем обозначать множество $\{\mu_i | i = 1, 2, \dots, n\}$.

В работе [8] для \mathfrak{L}_k , $k = p^m$, $n \in \mathbb{N}$, $m > 1$, было получено критериальное множество замкнутых классов:

$$\tilde{J}_k = \{ V_1, V_p, P_s, T_a, M_{0,s}, M_{0,\omega}, M_1, M_{i,\gamma}, R_i^C, R_i^H, B_q \mid \\ s \in \{1, 2, \dots, l\}, a \in E_k, \omega \in \Omega, i \in \{2, 3, \dots\}, \gamma \in \Gamma_i, q \in Q \},$$

где через B_q обозначен замкнутый класс, состоящий из всех л.-а. функций f , удовлетворяющих соотношению $U(f) \subset q$ для некоторого максимального подполя q поля $E_k(\xi)$, получаемого трансцендентным расширением поля E_k переменной ξ .

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Если q – собственное подполе, содержащее E_k , то $B_q \subseteq \Theta$ для некоторого Θ из множества $\tilde{J}_k \setminus \{B_q | q \in Q\}$.*

Теорема 2. Множество $\{B_q | q \in Q\}$ содержит предполные классы, не совпадающие ни с одним Θ из множества $\tilde{J}_k \setminus \{B_q | q \in Q\}$.

Таким образом, для случая $m > 1$ существуют предполные классы, порожденные максимальными подполями в поле $E_k(\xi)$, что отличает этот случай от случая простого поля ($m = 1$), где таких предполных классов нет.

Ограничение на не более чем счетную мощность множества предполных классов, порожденных максимальными подполями в поле $E_k(\xi)$, получаем из следующей теоремы.

Теорема 3. Любой замкнутый класс из множества $\{B_q | q \in Q\}$ является конечнопорожденным.

Автор выражает благодарность академику В. Б. Кудрявцеву за постановку задачи и постоянную поддержку работы.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. — 1965. — Вып. 13. — С. 45–74.
- [2] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, N 1. — С. 35–37.
- [3] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для о.-д. функций // Мат. заметки. — 1972. — Вып. 6. — С. 687–697.
- [4] Алешин С. В. О суперпозициях автоматных отображений // Киев: Кибернетика. — 1975. — № 1. — С. 29–34.
- [5] Алешин С. В. Об отсутствии базисов в некоторых классах инициальных автоматов // Проблемы кибернетики. — М.: Наука — 1970. — Вып. 22. — С. 67–75.
- [6] Бабин Д. Н. О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты // Докл. РАН — 1999, 367:4. — С. 439–441
- [7] Часовских А. А. Условия полноты линейно-р-автоматных функций // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2014. — Т. 18, — вып. 3. — С. 203–252.

- [8] Часовских А. А. Критериальные системы в классах линейно-автоматных функций над конечными полями // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, — вып. 3. — С. 151–160.
- [9] Часовских А. А. Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, — вып. 2. — С. 134–151.

**The completeness problem in classes of linear automata
Chasovskikh A.A.**

Classes of linear automata over finite fields with composition operations (superposition and feedback) are considered. Previously an algorithm for checking the completeness of finite subsets was obtained for these classes. In the case of a simple field, all precomplete classes whose set is a countable reduced criterial system are found. Previously in the general case the set of closed classes was constructed, which is a criterial system, including the family of classes generated by maximal subfields in the transcendental extension of the finite field under consideration. For simple fields, all classes of this family were absorbed by other classes from the reduced criterial system. Therefore, in the present paper the family is being investigated in the case of finite fields that are not simple. It turned out that part of the elements of the family is also absorbed in this case, but also among its elements there are precomplete classes that are finitely generated and not contained among the precomplete classes of other families.

Keywords: linear automaton, adder, delay, feedback, composition operations, completeness check algorithm, precomplete class.