Письмо в редакцию по поводу статьи З.А.Ниязовой "Расшифровка арифметических сумм монотонных конъюнкций"

Быстрыгова А.В.

В статье З.А.Ниязовой "Расшифровка арифметических сумм монотонных конъюнкций" получена точная оценка сложности расшифровки функции, имеющей не более двух нижних единиц. На самом деле, эту оценку можно понизить на 1 запрос, что и демонстрируется в данной работе.

Ключевые слова: точная расшифровка, суммы монотонных конъюнкций, запросы на значение.

Глубокоуважаемая редакция, прошу принять к рассмотрению замечание по работе [1]. В [1], согласно теореме 2, для случая $p = 2$ справедливо $\varphi(n, 2) \geq 2n$ и верно следствие 1, в котором говорится, что $\varphi(n, 2) = 2n$. На самом деле, $\varphi(n, 2) \leq 2n - 1$.

Далее сформулируем несколько определений, а также напомним некоторые из работы [1].

Под $\wedge$ будем понимать операцию логического И, то есть $a \wedge b$ имеет вектор значений (0001).

Пусть даны наборы $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Будем говорить, что набор $a \leq b$, если для любого i, $1 \leq i \leq n$ выполняется неравенство $a_i \leq b_i$.

Под подкубом набора x будем понимать подкуб, составленный из наборов a, удовлетворяющих отношению $a \leq x$.

Запросом к загаданной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а ответ на запрос $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равен количеству нижних единиц, которые лежат в подкубе набора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Под 0^i будем понимать набор, где все компоненты кроме i-й равны 1, а i-я равна 0.

Под $0^{i,j,A}, i \neq j,\ i,j \notin A$, будем понимать набор, где все компоненты кроме компонент с номерами i, j и компонент с номерами из множества A равны 1, а остальные переменные равны 0.

Утверждение 1. *Справедливо неравенство* $\varphi(n,2) \leq 2n-1, n \geq 2$.

Доказательство. Пусть загадана $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с не более, чем двумя нижними единицами. Запросим значение на всех наборах вида $0^i, i = 1, 2, \ldots, n$, соответственно потратив в точности n запросов. Возможны следующие случаи.

1) Ответы на всех запрошенных наборах равны 0.

   Запросим значение функции на наборе $(1, \ldots, 1)$. Если ответ на запрос равен 1, значит $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$. Иначе, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$.

   Следовательно, для восстановления вектора значений функции f суммарно было сделано не более $n+1$ запросов.

2) Ответ хотя бы на одном из наборов равен 1 или 2.

   Иными словами, хотя бы одна нижняя единица у функции точно есть, и она не находится в вершине $(1, \ldots, 1)$.

   Причем, выполнено следующее.

   а) Если $f(0^i) = 0$, то у всех нижних единиц i-я компонента равна 1.

   б) Если $f(0^i) = 2$, то у функции две нижние единицы и их i-я компонента равна 0.

   в) Если $f(0^i) = 1$, то, если у функции ровно одна нижняя единица, ее i-я компонента равна 0, а если нижних единиц две, то i-я компонента этих нижних единиц будет отличаться.

   Обозначим через q количество запросов, на которые ответ не равен 1.

   Если у функции ровно одна нижняя единица, она лежит в подкубе набора 0^i для некоторого i. Если нижних единиц две, тогда хотя бы в одной компоненте они отличаются. Следовательно, на какой-то из заданных 0^i запросов ответ равен 1.

   Рассмотрим подкуб, для всех наборов которого верно следующее: компоненты с номерами из множества $A_0 = \{i | 1 \leq i \leq n, f(0^i) = 0\}$

установлены в 1, а компоненты с номерами из множества $A_2 = \{i | 1 \leq i \leq n, f(0^i) = 2\}$ установлены в 0. В этом подкубе лежат все нижние единицы загаданной функции. Берем любое i, для которого верно равенство $f(0^i) = 1$. Заметим, что в подкубе набора 0^i лежит одна нижняя единица и ее i-я компонента равна 0.

Зададим $n-1-q$ запросов вида $0^{i,j,A_2}, j \in \{1, \ldots, n\} \setminus (A_0 \cup A_2 \cup \{i\})$. Если $f(0^{i,j,A_2}) = 0$, то j-я компонента искомой нижней единицы равна 1. Если $f(0^{i,j,A_2}) = 1$, то j-я компонента искомой нижней единицы равна 0.

Следовательно, задав дополнительно $n - 1 - q$ запросов, мы восстановим значения всех компонент одной нижней единицы. Если первая найденная нижняя единица лежит на нижнем слое рассматриваемого подкуба, то у функции f одна нижняя единица, иначе их две и вторая восстанавливается по первой.

В результате, мы разобрали все случаи и получили, что для восстановления функции было задано $n + (n - 1 - q)$ $(q \geq 0)$ запросов.

$\square$

Список литературы

[1] Ниязова З. А. Расшифровка арифметических сумм монотонных конъюнкций // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 4. — С. 169–195.

Letter to the editor concerning the paper by Z. A. Niyazova "Learning of arithmetic sum of monotone conjunctions"
Bistrigova A.V.

The complexity of learning functions with respect to the number of monotone conjunctions in their representation is studied in the paper "Learning of arithmetic sum of monotone conjunctions" by Z. A. Niyazova. In particular, lower and upper bounds on the number of queries one needs to learn the function, having no more than 2 conjunctions, are presented there. Here, we show that this result can be improved upon by one query.

Keywords: exact learning, sum of monotone conjunctions, membership queries.