

Число состояний универсального автомата бесконечного экрана, реализующего двунаправленное движение на луче

Кузнецова Е.В.¹

В работе рассматривается реализация одного класса законов движения клеточным автоматом на бесконечном экране. Показано, что минимальное число состояний клеточного автомата, моделирующего двунаправленное движение точки на луче, при котором точка не совершает 2 движения вправо подряд, равно 5.

Ключевые слова: клеточный автомат, число состояний, бесконечный экран, двунаправленное движение, конструирование изображений.

1. Введение

Исследования по клеточным автоматам начались с работы Джона фон Неймана [1]. В 1960-х годах Муром была доказана теорема о Райском саде [2]. В 1970 году была опубликована игра Жизнь, автором которой является математик Джон Конвей [3]. В 2002 году была опубликована книга, в которой рассказывались широкие применения клеточных автоматов во всех областях науки [4].

На механико-математическом факультете МГУ им. Ломоносова исследованием клеточных автоматов занимались В.Б. Кудрявцев, А.С. Подколзин, А.А. Болотов. Результатами их исследований стала монография [5].

Тема конструирования стационарных изображений клеточными автоматами была развита Е. Титовой в ее работах [6, 7, 8, 9]. Так, в работе [6] рассматривалась задача конструирования изображений клеточными автоматами на прямоугольном экране. В работе было показано, что для

¹ Кузнецова Екатерина Викторовна — инженер-разработчик, ООО НКБ "НИР" e-mail: kuz.net.sova@mail.ru.

Kuznetsova Ekaterina Viktorovna — engineer developer, LLC NKB "NIR".

конструирования любого изображения необходимо и достаточно, чтобы клеточный автомат имел 3 состояния.

В работе [7] продолжалось рассмотрение конструирования изображений клеточным автоматом на прямоугольном экране. В работе были даны оценки времени формирования клеточным автоматом изображений для разного числа состояний данного автомата.

Далее исследования сместились в область движения изображений на экране, создаваемого клеточным автоматом.

Так, в работе [8], рассматривается движение одноклеточного изображения на конечном экране длины m . Даются оценки количества состояний для конструирования автоматов, реализующих такие законы движения. Так, например, показывается, что четырех состояний достаточно для создания автомата, реализующего любой закон движения, в котором отсутствуют два движения вперёд подряд на конечном экране.

В работе [9] было подробно рассмотрено исследование движения точки на бесконечном экране. В работе описан алгоритм реализации на экране широкого класса законов движения и исследована мера Бернулли множества реализуемых законов движения. Показано, что почти все законы движения являются реализуемыми. Также показано, что относительно Тихоновской топологии множество реализуемых законов движения относится к первой категории Бэра, т.е. очень мало.

Основным отличием предлагаемой работы является другой, более широкий класс законов движения, в котором разрешено движение назад.

В данной работе рассматривается конечный автомат и бесконечная справа полоса шириной в одну клетку. К каждой клетке полосы прикреплен свой экземпляр конечного автомата. Состояние автомата, прикрепленного к клетке, зависит от состояния в предыдущий момент времени этого автомата и двух его входов, левого и правого. Под входами будем понимать состояния автоматов, прикрепленных к соседним клеткам (имеются в виду две клетки: ближайшая слева и ближайшая справа). Нулевое значение состояния автомата считается состоянием покоя, и автомат в состоянии покоя, если его соседи тоже в состоянии покоя, остаётся в состоянии покоя.

В дальнейшем состоянии автомата, прикрепленного к клетке, будем называть состоянием клетки. Множество автоматов, прикрепленных к клеткам полубесконечной прямой, является примером клеточного автомата. Подробнее про клеточные автоматы можно почитать в книге [10].

Левый вход самой левой клетки полубесконечной полосы будем называть управляющим входом и будем подавать на него произвольные, но определённые управляющие сигналы.

Все клетки полубесконечной полосы будем называть экраном. Конфигурацию из состояний клеточных автоматов в данный момент времени будем называть изображением на экране.

Отметим, что состояния клетки интерпретируются не одинаково. Так, состояние 0 интерпретируется, как состояние покоя, некоторое заранее фиксированное подмножество состояний клетки, называемых метками, интерпретируются как клетки чёрного цвета, а все остальные состояния, включая состояние покоя, интерпретируются как клетки белого цвета. В результате на экране получается чёрно-белое изображение.

В работе накладывается ограничение на возможные изображения. Так, двух меток на экране быть не может, т.е. две разные клетки не могут принимать состояния, содержащиеся в подмножестве состояний, считающихся меткой.

Законом движения точки на экране назовем последовательность, состоящую из символов f, s, b (f – forward, s – stop, b – back), кодирующих перемещение точки по экрану в каждый момент времени. Так, если в момент времени t точка сместилась на одну клетку вправо, то t -ый член последовательности примет значение f , если сместилась влево, то t -ый член последовательности примет значение b , если никуда не сместилась, то t -ый член последовательности примет значение s . Здесь время t отсчитывается от того момента, когда в самой левой клетке появляется метка.

Подробнее про конструирование изображений и их движения на экране можно почитать в статьях [6, 8].

Нас будет интересовать определенный класс S законов движения, в которых нет двух символов f подряд.

Основной целью работы являлось определение наименьшего числа состояний клеточных автоматов, при котором можно реализовать все законы движения из класса S , при этом выбор управляющих сигналов через управляющий вход экрана остаётся за нами, и зависит от закона движения. В работе было показано, что минимальное количество состояний клеточного автомата, при котором можно реализовать любое движение из данного класса, равно пяти.

Автор выражает благодарность профессору Э.Э. Гасанову за научное руководство и постановку задачи, а также Г.В. Калачеву за помощь в работе.

2. Основные определения и формулировка результата

Определим основные понятия, используемые в данной работе.

Пусть S — множество конечных и бесконечных последовательностей, состоящих из элементов $\alpha_n \in \{sf, s, b\}$, в префиксе любой длины которых количество символов b не превышает количества символов f . Элементы множества S будем называть *законами движения*. Символ f подразумевает движение на одну клетку вправо, s — остаться на месте, b — на одну клетку влево.

Экраном будем называть следующую конструкцию.

Пусть имеется бесконечная в правую сторону полоса шириной в одну клетку. В каждую клетку полосы поместим по одному экземпляру одного и того же конечного автомата. К входам этого автомата присоединим выходы автоматов, стоящих в двух соседних с ним клетках, то есть у автомата имеется *левый* вход, *правый* вход и текущее состояние автомата. Выходом автомата в заданный момент времени является его состояние в этот момент времени. Для автомата, стоящего в самой левой клетке полосы левый вход не определён. Будем называть его *управляющим входом* и подавать на него управляющие сигналы.

Будем говорить, что *на экране реализуется движение по закону* $A \in S$, если выполняются следующие условия:

- 1) в некоторый момент времени в самой левой клетке экрана появляется метка (до этого на экране нет меток), этот момент будем называть *моментом начала движения* или *началом движения*;
- 2) изменение позиции метки на экране в i -й момент от начала движения соответствует i -й букве в слове или сверхслове A , а именно, если $A(i) = s$, то в $(i + 1)$ -й момент метка остаётся в той же клетке, где была в текущий момент, если $A(i) = f$, то в $(i + 1)$ -й момент метка сдвинется на одну ячейку вправо, если $A(i) = b$, то в $(i + 1)$ -й момент метка сдвинется на одну клетку влево, по сравнению со своим текущим положением;
- 3) в каждый момент времени после начала движения на экране есть ровно одна метка.

Значения состояний клеточного автомата, при которых считается, что клетка, находящаяся в данном состоянии, видима (чёрная) будем называть *метками*.

Экран будем называть *универсальным* для множества законов движения S , если для любого закона движения из S существует такая последовательность управляющих сигналов, что на экране формируется такое изображение, что метка движется по закону S .

В данной работе рассматривается клеточный автомат, заданный на бесконечной в правую сторону полосе. Причем левый вход первой слева клетки является управляющим, туда подаются управляющие сигналы

(его нельзя изменить через функцию переходов φ , определяющую зависимость состояния клетки от состояний в предыдущий момент времени этой самой клетки и соседних с ней клеток; просто на каждом следующем такте туда подается следующий элемент управляющей последовательности, вырабатываемой некоторым управляющим устройством по закону движения).

Изначально в данном клеточном автомате одни нули. Затем управляющее устройство начинает подавать ему на вход управляющие сигналы (управляющая последовательность). В какой-то момент в самой левой клетке экрана появится метка, которая интерпретируется как точка, движение которой мы и изучаем.

Таким образом, под появлением точки на экране будем подразумевать переключение клетки автомата, соответствующей самой левой клетке экрана, в состояние, соответствующее состоянию метки.

После того, как точка (метка) появилась на экране, то она никуда не исчезает и двух точек (меток) на экране быть не может (поэтому, если метка движется, например, вправо, то на изначальном месте она должна затереться, т.е. клетка, в которой была метка, должна перейти в состояние, не соответствующее метке). Возможное и невозможное поведение метки изображены на рисунке 1.

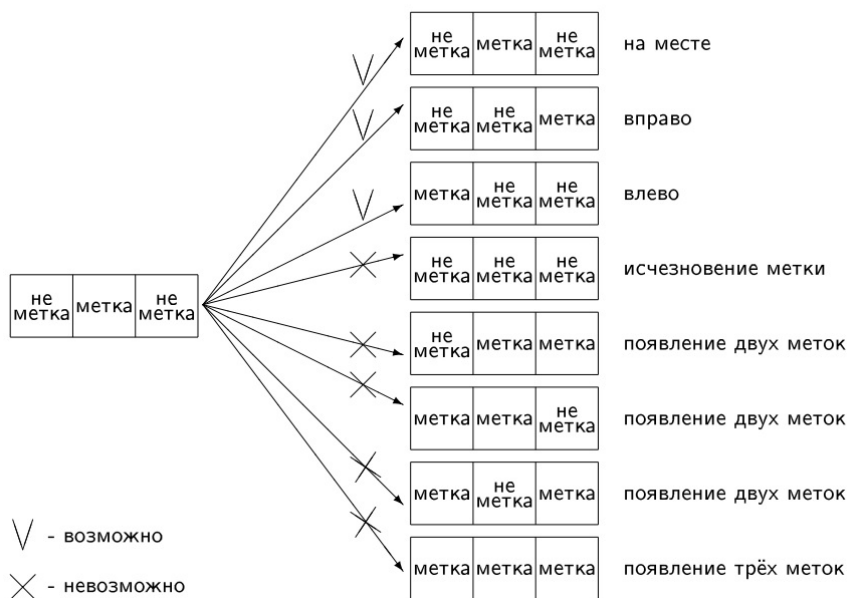


Рис. 1.

В данной статье показано, что законы движения из S , обладающие тем свойством, что в них не встречается двух подряд идущих символов f , можно реализовать клеточным автоматом с пятью состояниями, причем оценка на количество состояний не улучшаема.

Ранее Титовой был получен аналогичный результат для законов движения без движения назад.

Теорема 1 (Титовой [8]). Пусть $F = ((sf) \vee (s))^\infty$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s\}$. Тогда мощность наименьшего множества состояний клеточного автомата, необходимого для осуществления любого закона из F равна 4.

Результат, полученный в этой работе, по сути является расширением результата Титовой.

Теорема 2. Пусть $S = ((sf) \vee (s) \vee (b))^\infty$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s, b\}$ таких, что в префиксе S любой длины количество символов b не превышает количества символов f . Тогда мощность наименьшего множества состояний клеточного автомата, необходимого для осуществления любого закона из S равна 5.

3. Вспомогательные определения

Перед доказательством основных утверждений введем ряд вспомогательных определений и обозначений.

Пусть $\alpha \in S$ — закон движения, где $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots$, $\alpha_i \in \{sf, s, b\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Обозначим $\overline{\alpha_n} = \alpha_1\dots\alpha_n$, $|\overline{\alpha_n}| = n$.

Определим функцию, идентифицирующую символ в i -ой позиции закона движения:

$$I(\alpha_i = a) = \begin{cases} 1 & \text{если } \alpha_i = a, \\ 0 & \text{если } \alpha_i \neq a. \end{cases}$$

Теперь используем её для подсчёта количества символов $\alpha_i \in \{sf, s, b\}$ в префиксе закона движения длины n :

$$\begin{aligned} I_{sf}(\bar{\alpha}_n) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = sf), \\ I_b(\bar{\alpha}_n) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = b), \\ I_s(\bar{\alpha}_n) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = s). \end{aligned}$$

Отсюда можем определить позицию метки на экране

$$d(\bar{\alpha}_n) = I_{sf}(\bar{\alpha}_n) - I_b(\bar{\alpha}_n) \geq 0$$

и количество тактов с начала движения

$$t(\bar{\alpha}_n) = I_s(\bar{\alpha}_n) + I_b(\bar{\alpha}_n) + 2I_{sf}(\bar{\alpha}_n)$$

для префикса закона движения длины n .

4. Законы движения со скоростью движения вперёд 1/2

Рассмотрим клеточный автомат K . Состояние клетки в следующий такт определяется её состоянием в настоящий момент, а также состояниями соседних с ней слева и справа клеток. Множество состояний автомата, прикрепленного к клетке, имеет вид $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, множество меток — $L = \{1, 2\}$. Функция переходов будет следующая:

$$\begin{aligned} \varphi(1, a, b) &= 0, \text{ где } a, b \in Q \setminus L, \\ \varphi(2, a, b) &= 1, \text{ где } a, b \in Q \setminus L, \\ \varphi(a, b, c) &= a, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in \{0, 4\}, c \in Q, \\ \varphi(0, 1, a) &= 1, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(3, 1, a) &= 0, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(4, 1, a) &= 2, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(a, 2, b) &= a, \text{ где } a, b \in Q \setminus L, \\ \varphi(a, 3, b) &= a, \text{ где } a \in Q \setminus L, b \in \{0, 2, 3, 4\}, \\ \varphi(a, 3, 1) &= 1, \text{ где } a \in Q \setminus L, \\ \varphi(a, b, c) &= 0, \text{ где два из трёх: } a \text{ и } b, \text{ или } b \text{ и } c, \text{ или } a \text{ и } c \in L. \end{aligned}$$

Рассмотрим пример. Реализуем закон движения $s f s f b b$. Для реализации этого закона входная последовательность будет $2 4 4 3 0 3 0$. Движение точки на экране (1 и 2, выделенные жирным шрифтом) изображено на рисунке 2. Строки — моменты времени.

| | | | |
|---|----------|----------|----------|
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 2 | 0 | 0 |
| 3 | 4 | 1 | 0 |
| 0 | 3 | 2 | 0 |
| 3 | 0 | 3 | 1 |
| 0 | 3 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |

Рис. 2.

Изначально на автомат подается 2, после чего 2 переходит в 1; см. правило $\varphi(2, a, b) = 1$, где $a, b \in Q \setminus L$.

Положение метки 1 не меняется, пока автомат слева от неё не примет состояние 3 [кодировка элемента b из закона движения, т.е. движение назад] или 4 [кодировка элемента f из закона движения, т.е. движение вперед]. В случае состояния 4 она меняется на метку 2, четвёрка при этом пропадает [см. законы $\varphi(4, 1, a) = 2$, где $a \in Q \setminus L$ и $\varphi(a, b, c) = a$, где $a \in Q \setminus L$, $b \in \{0, 4\}$, $c \in Q$] (рисунок 3).



здесь $* \in Q \setminus L$

Рис. 3.

Метка 2 исчезает в следующий такт, одновременно с этим справа от нее появляется метка 1 [законы $\varphi(2, a, b) = 1$, где $a, b \in Q \setminus L$ и $\varphi(a, 2, b) = a$, где $a, b \in Q \setminus L$] (рисунок 4).

Если же слева от метки 1 появляется сигнал 3, то в следующий такт метка займёт его место, тем самым двигаясь назад [законы $\varphi(a, 3, 1) = 1$, где $a \in Q \setminus L$ и $\varphi(3, 1, a) = 0$, где $a \in Q \setminus L$]. Сигналы 3 и 4 являются вспомогательными, до встречи с меткой они движутся со скоростью 1 [$\varphi(a, b, c) = a$, где $a \in Q \setminus L$, $b \in \{0, 4\}$, $c \in Q$]. Толкающий сигнал 4

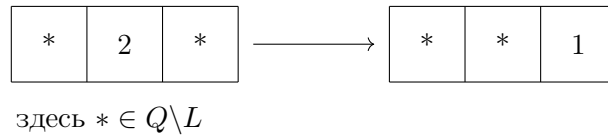


Рис. 4.

можно подавать с любой частотой, а за притягивающим сигналом 3, если метка уже появилась на экране, должен следовать ещё один сигнал, например, 0 [это нужно для того, чтобы управляющие сигналы вовремя оказывались рядом с меткой, что видно на рисунке 2].

Движение вперёд изображено на рисунке 5а. То есть, чтобы осуществить движение вперёд со скоростью $1/2$, нужно подать на вход столько четвёрок подряд, сколько в законе движения символов f .

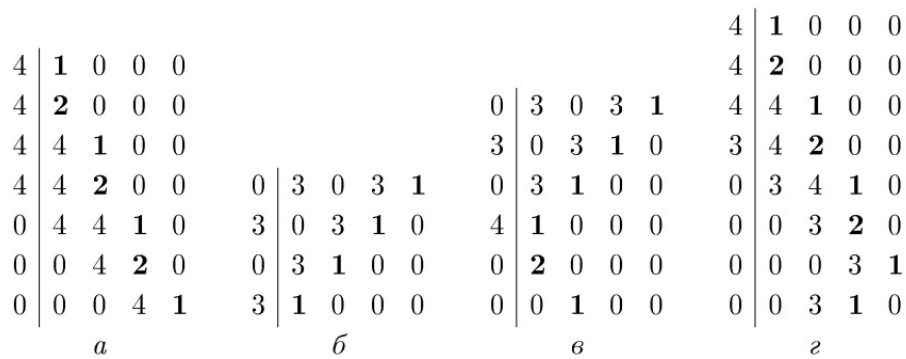


Рис. 5.

Движение назад изображено на рисунке 5б. Чтобы осуществить движение назад со скоростью 1, нужно подать на вход последовательность $(30)^m$, где m — количество элементво b в данном куске закона движения.

Если после b в законе движения следует sf (сразу f следовать не может), то после 30 нужно подать на вход 4 (рисунок 5в). А если за f следует b , то сразу за 4 на вход нужно подавать 3 (рисунок 5г).

Для того, чтобы метка оставалась на месте, на вход подаются нули.

Этим способом точку можно двигать по любому наперед заданному закону движения из множества S .

То есть для клеточного автомата K с пятью состояниями существует способ реализации всех законов движения из S . Докажем это строго.

Лемма 1. Пусть S — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s, b\}$ таких, что в префиксе S любой длины количество символов b не превышает количества символов f . И пусть дано слово $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \dots \in S$, сопоставим ему управляющую последовательность — слово $\beta = 2\beta_1 \dots \beta_n \dots$, где

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i = s, \\ 30, & \text{если } \alpha_i = b, \\ 4, & \text{если } \alpha_i = sf. \end{cases}$$

Тогда, если на управляющий вход клеточного автомата K подавать последовательность β , то справедливы следующие утверждения:

1) в момент времени $t(\overline{\alpha_{n-1}})$ в позиции $d(\overline{\alpha_{n-1}}) - 1$ будет находиться символ β_n^* , где

$$\beta_n^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_n = s, \\ 3, & \text{если } \alpha_n = b, \\ 4, & \text{если } \alpha_n = sf, \end{cases}$$

2) в момент времени $t(\overline{\alpha_n})$ метка на экране будет в позиции $d(\overline{\alpha_n})$.

Доказательство. Воспользуемся формулами:

$$\begin{aligned} I_{sf}(\overline{\alpha_n}) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = sf), \\ I_b(\overline{\alpha_n}) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = b), \\ I_s(\overline{\alpha_n}) &= \sum_{i=1}^n I(\alpha_i = s), \\ d(\overline{\alpha_n}) &= I_{sf}(\overline{\alpha_n}) - I_b(\overline{\alpha_n}) \geq 0, \\ t(\overline{\alpha_n}) &= I_s(\overline{\alpha_n}) + I_b(\overline{\alpha_n}) + 2I_{sf}(\overline{\alpha_n}). \end{aligned}$$

Доказательство будем вести индукцией по длине n префикса закона движения.

Базис индукции: $n = 1$ и $n = 2$. Возможны следующие случаи.

а) $n = 1$. $\overline{\alpha_1} = \alpha_1 = b$ — данный закон движения не из класса S , $n = 2$ рассматривать не нужно.

б) $n = 1$. $\overline{\alpha_1} = \alpha_1 = s$, $t(\overline{\alpha_1}) = 1$, $d(\overline{\alpha_1}) = 0$.

Подадим на вход последовательность 20. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 6а. В дальнейшем символом * будем обозначать произвольный символ из множества $Q \setminus L$.

$$\begin{array}{ccc}
2 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array} \right. & 2 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array} \right. & 2 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array} \right. \\
a & б & в
\end{array}$$

Рис. 6.

В момент времени $t = 0$ (момент появления метки на экране) в позиции $d = -1$, то есть на входе, будет находиться $\beta_1^* = 0$. В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 1$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_1}) = 0$. Верно.

- б.1) $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = sb$ — данный закон движения не из класса S .
б.2) $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = ss$, $t(\overline{\alpha_2}) = 2$, $d(\overline{\alpha_2}) = 0$.

Подадим на вход последовательность 200. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 6б.

В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 1$ в позиции $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = -1$, то есть на входе, будет находиться $\beta_2^* = 0$. В момент времени $t(\overline{\alpha_2}) = 2$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_2}) = 0$. Верно.

- б.3) $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = ssf$, $t(\overline{\alpha_2}) = 3$, $d(\overline{\alpha_2}) = 1$.

Подадим на вход последовательность 204. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 6в.

В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 1$ в позиции $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = -1$, то есть на входе, будет находиться $\beta_2^* = 4$. В момент времени $t(\overline{\alpha_2}) = 3$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_2}) = 1$. Верно.

- в) $n = 1$. $\overline{\alpha_1} = \alpha_1 = sf$, $t(\overline{\alpha_1}) = 2$, $d(\overline{\alpha_1}) = 1$.

Подадим на вход последовательность 24. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 7а.

$$\begin{array}{cccc}
2 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 \\ * & \mathbf{1} & 0 \end{array} \right. & 2 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 3 & \mathbf{1} & 0 \end{array} \right. & 2 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 \\ * & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array} \right. & 2 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 \\ * & * & \mathbf{1} & 0 \end{array} \right. \\
a & б & в & г
\end{array}$$

Рис. 7.

В момент времени $t = 0$ (момент появления метки на экране) в позиции $d = -1$, то есть на входе, будет находиться $\beta_1^* = 4$. В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 2$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_1}) = 1$. Верно.

в.1) $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = sfb$, $t(\overline{\alpha_2}) = 3$, $d(\overline{\alpha_2}) = 0$.

Подадим на вход последовательность 2430. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 7б.

В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 2$ в позиции $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = 0$, будет находиться $\beta_2^* = 3$. В момент времени $t(\overline{\alpha_2}) = 3$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_2}) = 0$. Верно.

в.2) $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = sfs$, $t(\overline{\alpha_2}) = 3$, $d(\overline{\alpha_2}) = 1$.

Подадим на вход последовательность 240. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 7в.

В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 2$ в позиции $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = 0$, будет находиться $\beta_2^* = 0$. В момент времени $t(\overline{\alpha_2}) = 3$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_2}) = 1$. Верно.

в.3) $n = 2$. $\overline{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 = sfsf$, $t(\overline{\alpha_2}) = 4$, $d(\overline{\alpha_2}) = 2$.

Подадим на вход последовательность 244. Согласно функции переходов будем наблюдать картину, изображённую на рисунке 7г.

В момент времени $t(\overline{\alpha_1}) = 2$ в позиции $d(\overline{\alpha_1}) - 1 = 0$, будет находиться $\beta_2^* = 4$. В момент времени $t(\overline{\alpha_2}) = 4$ метка на экране будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_2}) = 2$. Верно.

Индуктивный переход. Пусть при $n = k - 1$ утверждение выполнено.

Тогда в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ метка 1 (видно в доказательстве базы индукции) будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$. А в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-2}})$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-2}}) - 1$ будет находиться символ β_{k-1}^* .

Докажем, что при $n = k$ утверждение также выполняется.

1) Сигнал (3 или 4) до встречи с меткой движется со скоростью 1 — это следует из рассматриваемой функции переходов.

Рассмотрим момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$. Единица находится в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$.

а) Если последним в законе движения было движение вправо (sf), значит, в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$ четвёрка стояла в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$, а β_k^* — в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 3$. То есть в $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ β_k^* будет в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ (рисунок 8а).

б) Если последним в законе движения было движение влево (b), значит, в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ тройка стояла в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$, 0 — в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$, а β_k^* — в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$. То есть в $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ β_k^* будет в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ (рисунок 8б).

в) Если последней в законе движения была остановка (s), значит, в момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ ноль стоял в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$, а β_k^* — в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 2$. То есть в $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ β_k^* будет в $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ (рисунок 8в).

$$\begin{array}{ccc}
* & \beta_k^* & 4 & \mathbf{1} & * & * & * \\
* & * & \beta_k^* & \mathbf{2} & 0 & * & * \\
* & * & * & \beta_k^* & \mathbf{1} & 0 & * \\
& & & a & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
* & \beta_k^* & 0 & 3 & \mathbf{1} & * & * \\
* & * & \beta_k^* & \mathbf{1} & 0 & 0 & * \\
& & & b & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
* & \beta_k^* & 0 & \mathbf{1} & * & * \\
* & * & \beta_k^* & \mathbf{1} & 0 & * \\
& & & в & &
\end{array}$$

Рис. 8.

2) В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ метка 1 находится в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$.

В позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ будет находиться символ β_k^* (согласно утверждению пункта 1).

Докажем, что в момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ метка 1 будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_k})$.

Отдельно рассмотрим три случая для каждого возможного значения α_k .

а) $\alpha_k = s$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}
I_s(\overline{\alpha_k}) &= I_s(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
I_{sf}(\overline{\alpha_k}) &= I_{sf}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
I_b(\overline{\alpha_k}) &= I_b(\overline{\alpha_{k-1}}), \\
t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\
d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}).
\end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 9а.

$$\begin{array}{ccc}
& & & & & & * & 4 & \mathbf{1} & * & * & * \\
* & 0 & \mathbf{1} & * & * & * & 0 & 3 & \mathbf{1} & * & * & * & * & \mathbf{2} & 0 & * & * \\
* & * & \mathbf{1} & 0 & * & * & * & \mathbf{1} & 0 & 0 & * & * & * & * & \mathbf{1} & 0 & * \\
& & & a & & & & б & & & & & & в & & &
\end{array}$$

Рис. 9.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ находится метка 1, в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ находится символ $\beta_k^* = 0$.

Обозначим $q(d)$ символ в позиции d . В момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(\beta_k^*, 1, a) = \varphi(0, 1, a) = 1, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

б) $\alpha_k = b$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} I_b(\overline{\alpha_k}) &= I_b(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\ I_{sf}(\overline{\alpha_k}) &= I_{sf}(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ I_s(\overline{\alpha_k}) &= I_s(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\ d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1. \end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 9б.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ находится метка 1, в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ находится символ $\beta_k^* = 3$.

В момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(a, \beta_k^*, 1) = \varphi(a, 3, 1) = 1, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

в) $\alpha_k = sf$. В этом случае выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} I_{sf}(\overline{\alpha_k}) &= I_{sf}(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1, \\ I_b(\overline{\alpha_k}) &= I_b(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ I_s(\overline{\alpha_k}) &= I_s(\overline{\alpha_{k-1}}), \\ t(\overline{\alpha_k}) &= t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 2, \\ d(\overline{\alpha_k}) &= d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1. \end{aligned}$$

Согласно функции переходов получим картину, изображённую на рисунке 9в.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}})$ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ находится метка 1, в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) - 1$ находится символ $\beta_k^* = 4$.

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_{k-1}})) = \varphi(\beta_k^*, 1, a) = \varphi(4, 1, a) = 2, \text{ где } a \in Q \setminus L.$$

В момент времени $t(\overline{\alpha_{k-1}}) + 2 = t(\overline{\alpha_k})$ символ в позиции $d(\overline{\alpha_{k-1}}) + 1 = d(\overline{\alpha_k})$ будет равен

$$q(d(\overline{\alpha_k})) = \varphi(2, a, b) = 1, \text{ где } a, b \in Q \setminus L.$$

Мы доказали, что в момент времени $t(\overline{\alpha_k})$ метка 1 будет находиться в позиции $d(\overline{\alpha_k})$ для всех возможных вариантов движения. Значит, утверждение 2 леммы верно. □

Лемма 2 (Верхняя оценка). Пусть S — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s, b\}$ таких, что в префиксе S любой длины количество символов b не превышает количества символов f . Тогда мощность множества состояний клеточного автомата $|Q(S)| \leq 5$.

Доказательство. Пусть множество состояний $Q = E_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, множество меток $L = \{1, 2\}$ [это те состояния, при которых считается, что точка видна]. Рассмотрим клеточный автомат K .

Подадим на вход слово β , его первый символ 2, в следующий такт в начале экрана появится метка 1:

$$\varphi(2, a, b) = 1, \text{ где } a \in \{0, 3, 4\}, b \in Q \setminus L.$$

Согласно лемме 1, реализуем закон движения $S = \alpha$. □

Лемма 3. Пусть S — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s, b\}$ таких, что в префиксе S любой длины количество символов b не превышает количества символов f . Не существует универсального экрана с 4 состояниями клеточного автомата, среди которых либо одна метка, либо три, такого, что любой закон движения из S можно реализовать на этом экране.

Доказательство. Покажем, что 4 состояний не достаточно.

Предположим, что $|Q| = 4$, $Q = \{0, 1, 2, 3\}$.

1) $2, 3 \in L$ ($L = \{1, 2, 3\}$).

То есть у нас есть три метки, и ни одного сигнала. В любой момент после начала и до конца движения на экране находится ровно одна метка.

Рассмотрим произвольный момент времени. Пусть на экране находится метка 1, в следующий момент времени может измениться следующее: она может остаться на месте, переместиться вправо или влево, в то же время она может остаться меткой 1, или стать меткой 2, либо 3. Таким образом, для метки 1 есть 9 вариантов развития событий в следующий момент.

То же самое верно для меток 2 и 3. То есть, имея три метки и ни одного сигнала, возможно реализовать не более 9^3 законов движения, а нам требуется реализовать континуум, поскольку в S континуум законов движения.

2) $2, 3 \in Q \setminus L$ ($L = \{1\}$).

Пусть $F \subset S$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s\}$. Попробуем реализовать F .

Метка всего одна. Все движения вперед можно осуществить только из $\varphi(1, a, b) = 1$, $a, b \in \{0, 2, 3\}$, т.е. из предобработки. Под предобработкой

здесь понимается конечное множество сигналов, поданных на вход до появления метки на экране.

К моменту появления метки на экране там уже находится какая-то конфигурация, состоящая из элементов множества $\{0, 2, 3\}$. Таких конфигураций счётное число, а законов движения, которые надо реализовать, континуум. \square

Лемма 4. Пусть S — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s, b\}$ таких, что в префиксе S любой длины количество символов b не превышает количества символов f . Не существует универсального экрана с 4 состояниями клеточного автомата, среди которых две метки, такого, что любой закон движения из S можно реализовать на этом экране.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда у нас 2 метки — $1, 2 \in L$.

1) Пусть x — префикс закона движения. Обозначим через $l(x)$ длину управляющей последовательности для этого префикса.

$$l(x) = 2I_b(x) + I_s(x) + I_{sf}(x)$$

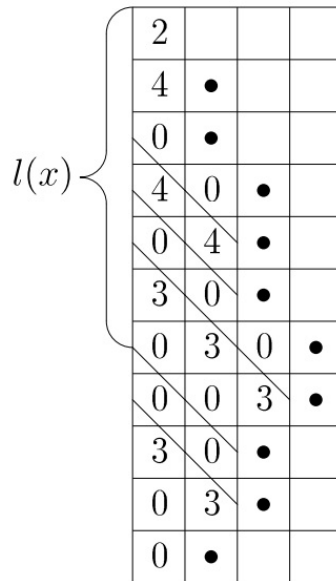


Рис. 10.

На рисунке 10 изображено движение метки на экране и управляющая последовательность для осуществления этого движения. Сигналы

до встречи с меткой движутся со скоростью 1 (наклонные линии на рисунке). В общем случае сигналы могут двигаться со скоростью, не большей, чем 1. Легко заметить, что для того, чтобы управляющие сигналы вовремя оказывались рядом с меткой, символ b закона движения должен соответствовать двум символам управляющей последовательности, символ s — одному символу управляющей последовательности, sf — также одному символу.

2) Сначала рассмотрим случай, когда предобработка отсутствует, то есть в момент появления метки на экране правее метки все автоматы находятся в состоянии покоя.

Пусть W — произвольное множество слов.

Если k — натуральное число, то через W^k обозначим множество слов $\{w_1 w_2 \dots w_k : w_i \in W, i = 1, \dots, k\}$.

Обозначим $f_W(n) = |\{x | x \in W, l(x) = n\}|$ — количество различных законов движения из множества W с заданной длиной n управляющей последовательности.

В доказательстве будем применять метод производящих функций [12]. Пусть $F_W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_W(n)t^n$ — производящая функция для $f_W(n)$.

Пусть $S^* \subset S$ — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{s, sf, sfb\}$.

Так как управляющая последовательность состоит из двух символов, то при помощи управляющей последовательности длины n возможно реализовать 2^n законов движения.

Докажем, что существует такой номер N , что для любого $n > N$ выполняется $f_{S^*}(n) > 2^n$.

Рассмотрим множество $H_x = \{x\}$, где $x \in \{s, sf, sfb\}$. Тогда $F_{H_x}(t) = t^{l(x)}$, где

$$l(x) = \begin{cases} 3 & \text{если } x = sfb, \\ 1 & \text{если } x \in \{s, sf\}. \end{cases}$$

Пусть $H = \{s, sf, sfb\}$ — множество законов движения из S^* , состоящих из одного элемента.

Тогда $F_H(t) = t^3 + t$ и $F_{H^k}(t) = (t^3 + 2t)^k$.

Пусть

$$H^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} H^k,$$

тогда производящая функция для множества H^* равна:

$$F_{H^*}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{H^k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (t^3 + 2t)^k = \frac{1}{1 - t^3 - 2t}.$$

Очевидно, что H^* совпадает с S^* , и, следовательно, $F_{H^*}(t)$ совпадает с производящей функцией для $f_{S^*}(n)$, то есть

$$F_{H^*}(t) = F_{S^*}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{S^*}(n)t^n.$$

Получим оценку радиуса сходимости ряда $F_{S^*}(t)$.
С одной стороны по признаку Коши:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f_{S^*}(n)^{1/n}}.$$

С другой стороны, так как $F_{S^*}(t) = 1/(1-t^3-2t)$, то $R \leq R^* = \min |t_i|$, где t_i — корни уравнения $1-t^3-2t=0$.

Из графика функции $1-t^3-2t$ можно получить оценку $R^* \approx 0.45 < \frac{1}{2}$.
Таким образом:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n)^{1/n}} \leq \min |t_i| = R^* < \frac{1}{2}.$$

Откуда следует, что существует такой номер N , что для любого $n > N$ выполняется

$$f(n)^{1/n} \geq \frac{1}{R^*} \implies f(n) \geq \left(\frac{1}{R^*}\right)^n > 2^n.$$

То есть нужно реализовать больше законов движения, чем это возможно.

3) Пусть $f_S(n) = |\{x|x \in S, l(x) = n\}|$ — количество различных законов движения из множества S с заданной длиной n управляющей последовательности при отсутствии предобработки.

Так как $S^* \subset S$, то существует такой номер N , что для любого $n > N$ выполняется

$$f_S(n) \geq f_{S^*}(n) \geq \left(\frac{1}{R^*}\right)^n > 2^n.$$

4) Теперь рассмотрим случай, когда предобработка есть, и пусть l_p — длина последовательности сигналов, подаваемой на вход на этапе предобработки.

Пусть e_0, e_1, e_2, \dots — состояние экрана в конце предобработки.

Так как за время предобработки первый символ входной последовательности $\alpha_1 = 3$ не может сместиться далее чем на l_p позиций от начала экрана (в противном случае скорость его движения будет выше 1), то

$$e_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \geq l_p, \\ 0 \text{ или } 3, & \text{если } 0 \leq i < l_p. \end{cases}$$

Отсюда следует, что число возможных состояний экрана после преобработки равно 2^{l_p} .

Пусть n — длина управляющей последовательности, подаваемой на вход, без учета этапа предобработки.

Обозначим $v_n(l_p) = 2^{l_p} \cdot 2^n$ — максимально возможное число законов движения, которые можно реализовать с помощью управляющей последовательности длины n и входной последовательности длины l_p на этапе предобработки.

Пусть A — некоторый фиксированный закон движения из множества S , $l(A)$ — длина управляющей последовательности для этого закона движения.

Рассмотрим множество законов движения $S_A = \{x : x = AB\} \subset S$, где A — фиксированный префикс, заданный выше, B — произвольное продолжение из S .

Пусть $l(x) = l(A) + l(B)$ — длина управляющей последовательности для закона движения AB .

Пусть $f_{S_A}(n) = |\{x | x \in S_A, l(x) = l(A) + l(B) = n\}|$ — количество различных законов движения из множества S_A с заданной длиной n управляющей последовательности.

Докажем, что для любого фиксированного $l_p < \infty$ существует такой номер N , что для любого $n > N$ выполняется $f_{S_A}(n) > v_n(l_p)$.

Пусть $f_S(k) = |\{y | l(y) = k\}|$ — количество различных законов движения y из S с заданной длиной k управляющей последовательности.

Как показано в пункте 3, существует такой номер N , что для любого $n > N$ выполняется

$$f_S(k) \geq \left(\frac{1}{R^*}\right)^k.$$

Доказательство данного утверждения учитывает только последовательность шагов в законе движения. Таким образом, можно утверждать, что во-первых данная оценка остается верной при наличии предобработки и не зависит от нее. Во-вторых, при наличии некоторого фиксированного префикса оценка справедлива для $k = l(B)$, где $l(B)$ — длина продолжения.

Значит, существует такой номер N , что для любого $n > N$ справедлива оценка:

$$f_{S_A}(n) = f_S(l_B = n - l_A) \geq \left(\frac{1}{R^*}\right)^{n-l_A}.$$

Покажем, что существует такой номер N_0 , что $f_{S_A}(n)/v_n(l_p) > 1$ при $n > N_0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{S_A}(n)}{v_n(l_p)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R^*}\right)^{n-l(A)} \cdot \frac{1}{2^{l_p} \cdot 2^n} = \frac{(R^*)^{l(A)}}{2^{l_p}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2R^*}\right)^n = \infty.$$

А значит существует такой номер N_0 , что для любого $n > N_0$ выполняется $f_{S_A}(n) > v_n(l_p)$.

Так как префикс A был выбран произвольно, то для любого l_p и любого $A \in S$ существует $B \in S$ такое, что $x = AB$ не реализуется при заданной длине предобработки l_p .

5) Покажем, что существует как минимум один закон движения из множества S , который нельзя реализовать при любой предобработке.

Пусть $l_p = 0$ (предобработка отсутствует). Тогда существует $B_0 \in S^* \subset S$ такой, что B_0 нельзя реализовать без предобработки (по доказанному в пункте 2).

Пусть $l_p = 1, A_1 = B_0$. Тогда существует $B_1 \in S$ такой, что B_0B_1 нельзя реализовать при $l_p = 1$ (по доказанному в пункте 4).

Но так как B_0 нельзя реализовать при $l_p = 0$, то и B_0B_1 также нельзя реализовать при $l_p = 0$. Следовательно, B_0B_1 не реализуется при любом $l_p \leq 1$.

Пусть $l_p = 2, A_2 = B_0B_1$. Тогда существует $B_2 \in S$ такой, что $A_2B_2 = B_0B_1B_2$ нельзя реализовать при $l_p = 2$ (в соответствии с пунктом 2) и при $l_p \leq 1$ (так как нельзя реализовать B_0B_1). Значит, $B_0B_1B_2$ не реализуется при любом $l_p \leq 2$.

Продолжая, аналогичным образом можем получить закон движения $\bar{B} = B_0B_1B_2 \dots B_n \dots$ такой, что для любого k $B_0B_1B_2 \dots B_k$ — не реализуется при любом $l_p \leq k$.

Так как $B_k \in S$ для любого k , то $\bar{B} \in S$.

Построенная последовательность префиксов B_k бесконечна, следовательно закон движения $\bar{B} \in S$ нельзя реализовать ни с какой длиной предобработки. □

Лемма 5 (Нижняя оценка). Пусть S — множество законов движения, состоящих из элементов множества $\{sf, s, b\}$ таких, что в префиксе S любой длины количество символов b не превышает количества символов f . Тогда мощность множества состояний клеточного автомата, необходимого для осуществления всех законов из S : $|Q(S)| > 4$.

Доказательство. Следует из лемм 3 и 4. □

Из лемм 2 и 5 следует теорема 2.

5. Заключение

В работе доказаны верхняя и нижняя оценки на число состояний клеточного автомата, реализующего множество законов S . Необходимо и достаточно пяти состояний.

Список литературы

- [1] Фон Нейман Дж., *Теория самовоспроизводящихся автоматов*, Мир, Москва, 1971.
- [2] Мур Э.Ф. Математические модели самовоспроизведения, *Математические проблемы в биологии*, Мир, Москва, 1966.
- [3] Gardner M. The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", *Scientific American*, 1970, № 4.
- [4] Wolfram S., *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Champaign, Illinois, 2002.
- [5] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Болотов А.А., *Основы теории однородных структур*, «Наука», Москва, 1990.
- [6] Титова Е.Е., “Конструирование изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **12:2** (2008), 105–121.
- [7] Титова Е.Е., “Линейное по времени конструирование изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **16:2** (2012), 215–234.
- [8] Титова Е.Е., “Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **18:1** (2014), 153–180.
- [9] Калачев Г.В., Титова Е.Е., “О мере множества законов движения точки, реализуемых клеточными автоматами”, *Интеллектуальные системы*, **22:3** (2018), 105–125.
- [10] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, «Наука», Москва, 1985, 320 с.
- [11] Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Подколзин А.С., *Основы теории интеллектуальных систем: в 4 кн. Книга четвёртая. Теория автоматов.*, «Издательские решения», Москва, 2018, 302 с.
- [12] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А., *Задачи и упражнения по дискретной математике.*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005, 416 с.

References

- [1] Von Neumann, John, *Theory of self-reproducing automata*, Urbana, University of Illinois Press, 1966
- [2] Edward F. Moore Machine models of self-reproduction, *Mathematical Problems in the Biological Sciences*, AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, U.S.A., 1962
- [3] Gardner M. The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", *Scientific American*, 1970, № 4
- [4] Wolfram S., *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Champaign, Illinois, 2002
- [5] Kudryavtsev V.B., Podkolzin A.S., Bolotov A.A., *Osnovy teorii odnorodnykh struktur [Fundamentals of the theory of homogeneous structures]*, «Nauka», Moscow, 1990 (in Russian)
- [6] Titova E.E., “Konstruirovaniye izobrazheniy kletochnymi avtomatami [Images construction by cellular automata]”, *Intelligent Systems*, **12:2** (2008), 105–121 (in Russian)
- [7] Titova E.E., “Lineynoe po vremeni konstruirovaniye izobrazheniy kletochnymi avtomatami [Linear time images construction by cellular automata]”, *Intelligent Systems*, **16:2** (2012), 215–234 (in Russian)

- [8] Titova E.E., “Konstruirovaniye dvizhushchikhsya izobrazheniy kletochnymi avtomatami [Moving images construction by cellular automata]”, *Intelligent Systems*, **18**:1 (2014), 153–180 (in Russian)
- [9] Kalachev G.V., Titova E.E., “O mere mnozhestva zakonov dvizheniya tochki, realizuemykh kletochnymi avtomatami [On the measure of the set of a point motion laws implemented by cellular automata]”, *Intelligent Systems*, **22**:3 (2018), 105–125 (in Russian)
- [10] Kudryavtsev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Vvedeniye v teoriyu avtomatov [Introduction to automata theory]*, «Nauka», Moscow, 1985 (in Russian), 320 pp.
- [11] Kudryavtsev V.B., Gasanov E.E., Podkolzin A.S., *Osnovy teorii intellektual’nykh sistem: v 4 kn. Kniga chetvertaya. Teoriya avtomatov. [Foundations of the theory of intelligent systems: in 4 books. Book four. Automata theory.]*, «Izdatel’skie resheniya», Moscow, 2018 (in Russian), 302 pp.
- [12] Gavrilov G.P., Sapozhenko A.A., *Zadachi i uprazhneniya po diskretnoy matematike [Problems and exercises in discrete mathematics]*, FIZMATLIT, Moscow, 2005 (in Russian), 416 pp.

The number of states of a universal automaton of an infinite screen that implements bidirectional motion on a ray
Kuznetsova E.V.

The paper considers the implementation of one class of laws of motion by a cellular automaton on an infinite screen. It is shown that the minimum number of states of a cellular automaton simulating the bidirectional movement of a point on a ray at which the point does not make 2 movements to the right in a row is 5.

Keywords: cellular automaton, number of states, infinite screen, bidirectional motion, image construction.