Алгоритм перевода конца цепочки в заданную точку в пространстве с метрикой городских кварталов

И. О. Бергер[1]

В работе рассматривается задача перемешения трехзвенной цепочки с одним закрепленным краем из начального положения в положение, в котором второй край попадает в заданную точку. В качестве начального положения берется положение, при котором все звенья цепочки лежат на оси абсцисс. При этом каждое звено цепи имеет фиксированную длину, но может изгибаться под углом 90 градусов в любой своей точке. В работе предложен алгоритм доставляющий минимум расстояния между начальным и конечным положениями цепочки, причем расстояние измеряется на основе метрики городских кварталов.

Ключевые слова: манхэттенская цепочка, манхэттенское расстояние, алгоритм, метрика городских кварталов.

1. Введение

Управление роботами — один из разделов интеллектуальных систем, активно развивающейся области науки. К этому разделу относятся, в частности, статьи [1], [2], описывающие алгоритм обучения робота-манипулятора, и статья [3], где были рассмотрены цепочки, концы звеньев которых перемещаются по окружности, евклидово расстояние между ними и расстояние Хэмминга. Такую цепочку можно представить как руку робота с n суставами. В статье [3] рассматривался вопрос, как перевести конец такой цепочки в нужную точку с минимальными затратами.

В данной статье при измерении расстояния между цепочками мы будем использовать манхэттенскую метрику, или метрику городских кварталов. Это метрика, в которой расстояние между двумя точками равно сумме модулей разностей их координат. Мы будем рассматривать другой вид цепочек — манхэттенские цепочки, конец которых перемещается по окружности в манхэттенской метрике, выглядящей, как квадрат наклонённый под углом в 45 градусов. Мы рассмотрим три алгоритма перевода конца таких цепочек в заданную точку и для цепочки длины

[1] *Бергер Ирина Олеговна* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ioberger@ya.ru.

Berger Irina Olegovna — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

3 со звеньями на оси абсцисс рассмотрим области, на которых эти алгоритмы выдают манхэттенскую цепочку, находящуюся на минимальном расстоянии от данной. Для измерения расстояния между цепочками сложим все манхэттенские расстояния между соответствующими точками цепочек.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Цепочкой $A = A_0A_1...A_n$ *длины* n называется $n+1$ точек $A_0, A_1, ..., A_n$, $A_i \in \mathbb{R}^2, i = 0..n, A_i \neq A_{i+1}, i = 0..n-1$.

Манхэттенской цепочкой называется цепочка, изображённая на плоскости следующим образом. Для всех $i, i = 0..n-1$, рассмотрим точки A_i, A_{i+1}. Если отрезок A_iA_{i+1} параллелен оси OX или OY, то изобразим их соединёнными прямой. Если A_iA_{i+1} не пареллелен осям координат, то A_i и A_{i+1} соединим линией, состоящей из двух отрезков, один из которых параллелен оси OX, другой — оси OY, как показано на рисунке. Соединим таким образом все соседние точки.

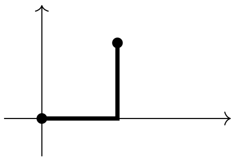

Рис.1: Вид звена манхэттенской цепочки.

Точка A_0 называется *центром манхэттнской цепочки.*

Линия, соединяющая A_i и A_{i+1} для любого $i = 0..n-1$ называется *звеном.*

Пусть N и M — точки на плоскости. Обозначим через $\rho(N, M) = |x_N - x_M| + |y_N - y_M|$ манхэттенское расстояние между точками N, M.

Обозначим через $d^A_{i,i+1} = \rho(A_i, A_{i+1}), i = 0..n-1$ *длину звена.*

Скажем, что *манхэттенская цепочка* $B = B_0B_1...B_n$ *получена из манхэттенской цепочки* $A = A_0A_1...A_n$ *перемещением конца*, если $B_0 = A_0$ и $\rho(A_i, A_{i+1}) = \rho(B_i, B_{i+1}), i = 0..n-1$.

Обозначим через $\mathfrak{P}(A)$ множество манхэттенских цепочек, получаемых перемещением конца манэттенской цепочки из A.

Областью допустимых положений конца манхэттенской цепочки $A = A_0A_1...A_n$ назовём множество точек $\mathfrak{K}(A) = \{P | P = B_n, B$ получена из A перемещением конца манхэттенской цепочки$\}$.

Манхэттенское расстояние между манхэттенскими цепочками $A = A_0A_1...A_n$ *и* $B = B_0B_1...B_n$ определяется как $\rho(A, B) = \sum\limits_{i=0}^{n} \rho(A_i, B_i)$.

Утверждение. *Множество манхэттенских цепочек длины n — метрическое пространство с метрикой ρ.*

Доказательство. Первые два свойства вытекают из соответствующих свойств для манхэттенской метрики на плоскости. Третье доказывается следующим образом:

$$\rho(A, C) = \rho(A_0, C_0) + \rho(A_1, C_1) + ... + \rho(A_n, C_n) \leq$$

$$\leq \rho(A_0, B_0) + \rho(B_0, C_0) + ... + \rho(A_n, B_n) + \rho(B_n, C_n) =$$

$$= \rho(A, B) + \rho(B, C)$$

Конец доказательства.

Обозначим через (O, d) окружность в манхэттнской метрике, центр которой O и радиус d.

Обозначим через $[O, d]$ круг в манхэттнской метрике, центр которого O и радиус d.

2.1. Область допустимых положений конца манхэттенской цепочки

Утверждение. *Пусть $A = A_0A_1...A_n$ — манхэттенская цепочка длины n. Область допустимых положений конца манхэттенской цепочки A имеет следующий вид:* $\mathfrak{K}(A) = \{P : \max\{d^A_{0,1} - (d^A_{1,2} + ... + d^A_{n-1,n}), 0\} \leq \rho(P, A_0) \leq d^A_{0,1} + ... + d^A_{n-1,n}\}$

Доказательство.

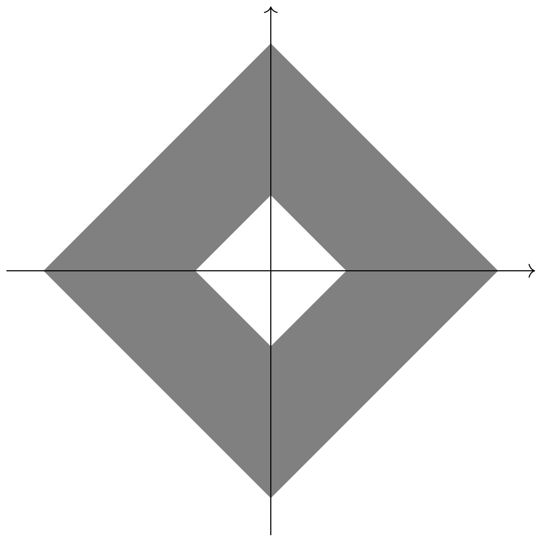

Рис. 2: Область допустимых положений конца цепочки.

Рассмотрим только случай, когда A_0 — центр координат O. Случаи, для которых это не выполняется, получаются параллельным переносом.

Воспользуемся индукцией по длине n манхэттенской цепочки. База индукции: при $n = 1$ область допустимых положений конца манхэттенской цепочки OA_1 — манхэттенская окружность с центром в точке O и радиусом $d^A_{0,1}$, то есть множество $\{P : d^A_{0,1} \leq \rho(P, O) \leq d^A_{0,1}\}$, удовлетворяющее условию.

Предположим, мы нашли вид области допустимых положений конца манхэттенской цепочки для $n = k$, и он соответствует множеству, указанному в условии теоремы. Найдём её вид для $n = k + 1$.

Возьмём точку P на плоскости. Построить манхэттенскую цепочку $OA_1...A_{k+1}$ с концом в точке P можно тогда и только тогда, когда манхэттенская окружность $(P, d^A_{k,k+1})$ пересекает область допустимых положений конца манхэттенской цепочки $OA_1...A_k$. Тогда и только тогда мы можем переместить конец манхэттенской цепочки $OA_1...A_k$ в точку пересечения P_0 и соединить P_0 и P звеном.

Чтобы пересечение не было пустым, точка P должна располагаться на расстоянии, меньшем или равном $d^A_{k,k+1}$ от области допустимых положений конца манхэттенской цепочки $OA_1...A_k$, то есть в области $\{P : \max\{d^A_{0,1} - (d^A_{1,2} + ... + d^A_{k,k+1}), 0\} \leq \rho(P, O) \leq d^A_{0,1} + ... + d^A_{k,k+1}\}$ Конец доказательства.

2.2. Алгоритмы перевода конца манхэттенской цепочки в заданную точку

Алгоритм А1

Пусть нам даны манхэттенская цепочка длины n, $A = OA_1...A_n$, и точка P на плоскости. Чтобы найти манхэттенскую цепочку $OA'_1...A'_{n-1}P$, полученную переводом конца A в точку P, выполним следующую последовательность действий.

Индуктивно определим A'_i при $i = 0..n-2$. Для $i = 0$ пусть A'_0 — это точка O.

Обозначим через $\mathfrak{D}^i$ пересечение манхэттенской окружности $(A'_{i-1}, d_{i-1,i})$ и манхэттенского круга $[P, \sum_{k=i}^{n-1} d_{k,k+1}]$. Это множество таких точек, в одной из которых должен находиться конец i-ого звена, чтобы искомая манхэттенская цепочка существовала.

Пересечение манхэттенских круга и окружности — это множество, в которое могут входить точки и отрезки.

Возможны несколько случаев:

- Если $\mathfrak{D}^i$ пусто, то искомой манхэттенской цепочки не существует, и алгоритм заканчивает свою работу.

- Если $\mathfrak{D}^i$ представляет собой одну точку, то её и возьмём в качестве A'_i.
- Если $\mathfrak{D}^i$ предствляет собой совокупность отрезков, то выбираем на них ближайшую к A_i точку. Для этого рассмотрим концы отрезков и точку, принадлежащую $\mathfrak{D}^i$, с той же ординатой, что и у A_i, если эта точка есть. Эта точка получается проведением горизонтальной прямой из A_i. Сравниваем расстояния от A_i до этих точек и выбираем минимальное. Это будет точка A'_i.

Мы определили A'_i при $i = 1..n-2$. Теперь найдём A'_{n-1}.

Пусть $\mathfrak{D}^{n-1}$ — пересечение манхэттенских окружностей $(A'_{n-2}, d_{n-2,n-1})$ и $(P, d_{n-1,n})$.

Для нахождения пересечения попарно проверяем, пересекаются ли отрезки манхэттенских окружностей, и добавляем в ответ точку, если они пересекаются по точке, или пару точек, если они пересекаются по отрезку.

Возможны несколько случаев:

- Если $\mathfrak{D}^{n-1}$ пусто, то искомая цепочка не существует, и алгоритм завершает работу.
- Если $\mathfrak{D}^{n-1}$ — точка, то именно её выберем в качестве A'_{n-1}.
- Если $\mathfrak{D}^{n-1}$ представляет собой две точки, то возьмём ближайшую к A_{n-1}.
- Если $\mathfrak{D}^{n-1}$ — это отрезок или совокупность отрезков, то сравниваем расстояния от A_{n-1} до их концов и до точки $\mathfrak{D}^{n-1}$ с той же ординатой, что и у A_{n-1}. Ближайшую точку выбираем в качестве A'_{n-1}.

Таким образом, мы индуктивно определили манхэттенскую цепочку, полученную из $OA_1A_2..A_n$ перемещением конца манхэттенской цепочки в точку P.

Алгоритм А2

Пусть нам даны манхэттенская цепочка длины n, $A = OA_1...A_n$, и точка P на плоскости. Рассмотрим другой способ найти манхэттенскую цепочку $OA'_1...A'_{n-1}P$, полученную переводом конца A в точку P.

Индуктивно определим A'_i при $i = n..2$. Пусть при $i = n$ A'_n — это точка P.

Обозначим через $\mathfrak{D}^i$ пересечение манхэттенской окружности $(A'_{i+1}, d_{i,i+1})$ и манхэттенского круга $[O, \sum_{k=0}^{i-1} d_{k,k+1}]$. Это множество таких точек, в одной из которых должен находиться конец i-ого звена, чтобы искомая манхэттенская цепочка существовала.

Пересечение манхэттенских круга и окружности — это множество, в которое могут входить точки и отрезки.

Возможны несколько случаев:

- Если $\mathfrak{D}^i$ пусто, то искомой манхэттенской цепочки не существует, и алгоритм заканчивает свою работу.
- Если $\mathfrak{D}^i$ представляет собой одну точку, то её и возьмём в качестве A'_i.
- Если $\mathfrak{D}^i$ предствляет собой совокупность отрезков, то выбираем на них ближайшую к A_i точку. Делаем это тем же способом, что и в алгоритме A1.

Мы определили A'_i при $i = n - 1..2$. Теперь найдём A'_1.

Пусть $\mathfrak{D}^1$ — пересечение манхэттенских окружностей $(A'_2, d_{1,2})$ и $(O, d_{0,1})$.

Пересечение находим тем же образом, что в алгоритме A1.

Возможны несколько случаев:

- Если $\mathfrak{D}^1$ пусто, то искомой цепочки не существует, и алгоритм завершает работу.
- Если $\mathfrak{D}^1$ — точка, то именно её выберем в качестве A'_1.
- Если $\mathfrak{D}^1$ представляет собой две точки, то возьмём ближайшую к A_1.
- Если $\mathfrak{D}^1$ — это отрезок или совокупность отрезков, то ближайшую точку выбираем в качестве A'_1.

Таким образом, мы получили вторую манхэттенскую цепочку, полученную из $OA_1A_2...A_n$ перемещением конца манхэттенской цепочки в точку P.

Алгоритм A3

Следующий алгоритм заключается в том, что мы применяем оба алгоритма A1 и A2 и сравниваем их результаты. Тот результат, который находится ближе к оригинальной манхэттенской цепочке, выдаём в качестве ответа.

2.3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $d \in \mathbb{R} > 0$ *и* $A = OA_1A_2A_3$ *— такая манхэттенская цепочка, что* $O = (0, 0)$*,* $A_1 = (d, 0)$*,* $A_2 = (2d, 0)$*,* $A_3 = (3d, 0)$*. Пусть точка* $P \in \{(x, y) : d \leq \rho((x, y), O) \leq 3d\}$*. Манхэттенская* *цепочка, построенная с помощью алгоритма* A1 *для данных точки* P *и манхэттенской цепочки* A*, находится на минимальном расстоянии от* $A = OA_1A_2A_3$ *среди всех манхэттенских цепочек, полученных из* $A = OA_1A_2A_3$ *перемещением конца в* P*.*

Теорема 2. *Пусть* $d \in \mathbb{R} > 0$ *и* $A = OA_1A_2A_3$ *— такая манхэттенская цепочка, что* $O = (0,0)$*,* $A_1 = (d,0)$*,* $A_2 = (2d,0)$*,* $A_3 = (3d,0)$*. Если точка* P *лежит в области допустимых положений конца цепочки* A*, то манхэттенская цепочка, построенная с помощью алгоритма* A3 *для точки* P *и манхэттенской цепочки* A*, находится на минимальном расстоянии от* $A = OA_1A_2A_3$ *среди всех манхэттенских цепочек, полученных из* $A = OA_1A_2A_3$ *перемещением конца в* P*. Если точка* P *лежит вне области допустимых положений конца цепочки* A*, то ответ алгоритма* A3 *пуст.*

3. Доказательство результатов

3.1. Доказательство теоремы 1

Разобъём область $M = \{(x, y) : d \le \rho((x, y), O) \le 3d\}$ на области:

- $M_1 = \{(x, y) : \rho((x, y), A2) < d, y \le 0\}$
- $M_2 = \{(x, y) : \rho((x, y), (d, d)) < d\}$
- $M_3 = \{(x, y) : \rho((x, y), (0, 2d)) < d\}$
- $M_4 = \{(x, y) : \rho((x, y), (-d, d)) < d\}$
- $M_5 = \{(x, y) : \rho((x, y), (-2d, 0)) < d, y \le 0\}$
- границы этих областей

Если мы докажем утверждение теоремы для точки P, принадлежащей одной из этих областей, то оно справедливо для симметричной ей относительно оси OX области, так как данная в условии манхэттенская цепочка симметрична относительно оси OX.

Обозначим через $A' = OA'_1A'_2P$ манхэттенскую цепочку, полученную с помощью алгоритма A1.

1. Сначала рассмотрим P, лежащее в области $M_1 = \{(x, y) : \rho((x, y), A_2) < d, y \ge 0\}$.

В этом случае, согласно алгоритму A1, в качестве A'_1 мы выбираем точку A_1, так как она лежит внутри манхэттенского круга $[P, 2d]$. Затем выбираем в качестве A'_2 точку персечения манхэттенских окружностей (P, d) и (A'_1, d), находящуюся на минимальном манхэттенском расстоянии от A_2.

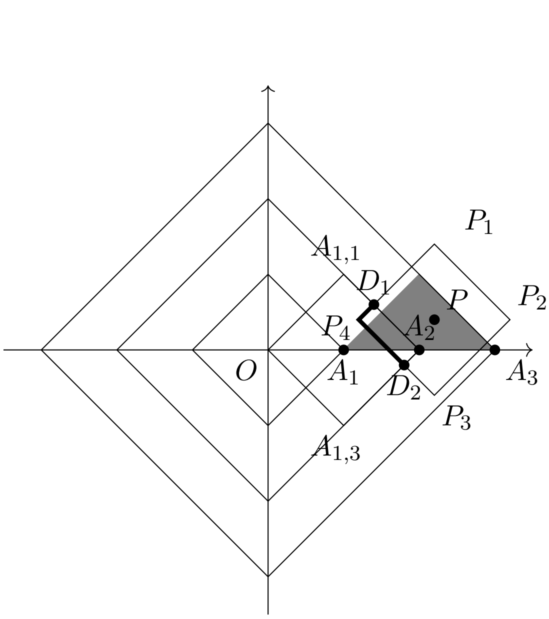

Рис.3: Случай 1.

Построим следующие манхэттенские окружности:

- (O, d) — множество точек, в которые можно переместить конец первого звена.
- (A_1, d) — множество точек, в которые можно переместить конец второго звена при условии, что первое звено остаётся на месте.
- (P, d) — множество, включающее в себя все возможные положения конца второго звена, при которых можно построить манхэттенскую цепочку, полученную из данной перемещением конца в точку P.

Построим также манхэттенский круг $[O, 2d]$. Этот манхэттенский круг — множество допустимых положений конца манхэттенской цепочки OA_1A_2. Его пересечение с манхэттенской окружностью (P, d) — множество точек, при перемещении конца второго звена в которые мы можем построить манхэттенскую цепочку, полученную из данной перемещением конца в точку P. Это множество отмечено на рисунке жирной линией. Обозначим его $\mathfrak{D}$.

Обратим внимание, что манхэттенская окружность (A_1, d) пересекает манхэттенскую окружность (P, d) в точках множества $\mathfrak{D}$, для которых расстояние до точки A_2 наименьшее среди всех точек множества $\mathfrak{D}$. Одна из них — точка, обозначенная на рисунке через D_2.

Пусть A_1'' лежит на манхэттенской окружности (O, d). Обозначим D'' пересечение манхэттенских окружностей (A_1'', d) и (P, d). A_2'', если оно существует, будем считать равным $\arg\min_{x \in D''} \rho(A_2, x)$.

Если A''_2 существует, манхэттенское расстояние между манхэттенскими цепочками $OA_1A_2A_3$ и $OA''_1A''_2P$ равно

$$\rho(OA_1A_2A_3, OA''_1A''_2P) = \rho(A''_1, A_1) + \rho(A''_2, A_2) + \rho(A_3, P)$$

Учитывая, что $\rho(A''_1, A_1) \geq 0$, $\rho(A''_2, A_2) \geq \rho(A_2, D_2)$, а $\rho(A_3, P)$ не зависит от выбора точек A''_1 и A''_2, минимум расстояния будет достигаться при $A''_1 = A_1$ и $A''_2 = D_2$, и он равен $\rho(A_2, D_2) + \rho(A_3, P)$.

Значит, чтобы получить манхэттенскую цепочку, находящуюся на минимальном расстоянии от данной и заканчивающуюся в P, мы должны оставить конец первого звена на месте, а конец второго поместить в точку на пересечении (P, d) и (A_1, d), манхэттенское расстояние до которой от A_2 минимально. Именно так строится нужная манхэттенская цепочка в алгоритме A1.

2. Рассмотрим P, лежащее в области $M_2 = \{(x, y) : \rho((x, y), (d, d)) < d\}$.

В этом случае, также, как в предыдущем, согласно алгоритму A1 точка A'_1 совпадает с A_1, так как точка A_1 находится внутри манхэттенского круга $[P, 2d]$ и является ближайшей к самой себе.

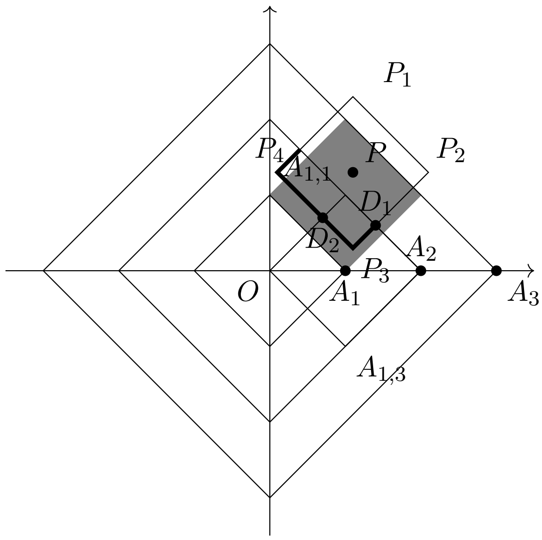

Рис.4: Случай 2.

Доказательство для этого случая практически полностью совпадает с доказательством для случая 1, только множество $\mathfrak{D}$ выглядит иначе и ближайшая к A_2 точка на рисунке обозначена D_1.

3. Рассмотрим область $M_3 = \{(x, y) : \rho((x, y), (0, 2d)) < d\}$.

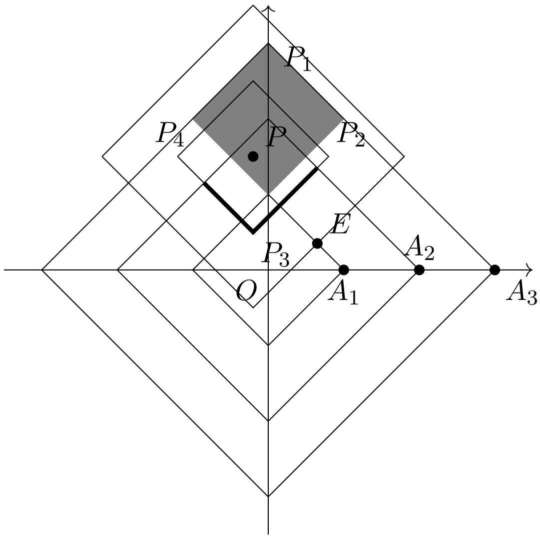

Рис.5: Случай 3.

Этот пункт отличается от предыдущих тем, что не существует манхэттенских цепочек, полученных из данной перемещением конца в точку P, таких, что первое звено остаётся на своём месте. Согласно алгоритму A1, в качестве точки A_1' мы должны взять ближаюшую к A_1 точку из точек манхэттенской окружности (O, d), лежащих во внутренности манхэттенской окружности $(P, 2d)$. Эта точка на рисунке обозначена E.

Построим манхэттенскую окружность с радиусом d и центром в точке E. Она пересекает манхэттенскую окружность (P, d) по отрезку стороны P_2P_3, поскольку он находится на манхэттенском расстоянии d.

Снова построим манхэттенский круг $[O, 2d]$. Его пересечение с манхэттенской окружностью (P, d) отмечено на рисунке жирной линией. Обозначим его $\mathfrak{D}$.

Обратим внимание, что точка E находится на манхэттенском расстоянии d от стороны P_2P_3 манхэттенской окружности (P, d), и манхэттенская окружность (E, d) пересекает манхэттенскую окружность (P, d) по отрезку стороны P_2P_3, для которого манхэттенское расстояние до точки A_2 наименьшее среди всех точек множества $\mathfrak{D}$. Обозначим это расстояние t.

Пусть A_1'' лежит на пересечении манхэттенской окружности (O, d) и манхэттенского круга $[P, 2d]$. Обозначим через D'' пересечение манхэттенских окружностей (A_1'', d) и (P, d). A_2'' будем считать равным

$$\arg\min_{x \in D''} \rho(A_2, x)$$

.

Манхэттенское расстояние между манхэттенскими цепочками $OA_1A_2A_3$ и $OA_1''A_2''P$ равно

$$\rho(OA_1A_2A_3, OA_1''A_2''P) = \rho(A_1'', A_1) + \rho(A_2'', A_2) + \rho(A_3, P)$$

Учитывая, что $\rho(A_1'', A_1) \geq \rho(E, A_1)$, $\rho(A_2'', A_2) \geq t$, а $\rho(A_3, P)$ не зависит от выбора точек A_1'' и A_2'', минимум расстояния будет достигаться при $A_1'' = E$ и $A_2'' = \arg\min_{x \in D''} \rho(A_2, x)$.

Значит, чтобы получить манхэттенскую цепочку, находящуюся на минимальном расстоянии от данной и заканчивающуюся в P, мы должны поместить конец первого звена в точку пересечения $[P, 2d]$ и $(0, d)$ находящуюся ближе всех к A_1, а конец второго поместить в точку на пересечении (P, d) и (A_1, d), манхэттенское расстояние до которой от A_2 минимально. Именно так строится нужная манхэттенская цепочка в алгоритме A1.

4. Рассмотрим область $M_4 = \{(x, y) : \rho((x, y), (-d, d)) < d\}$.

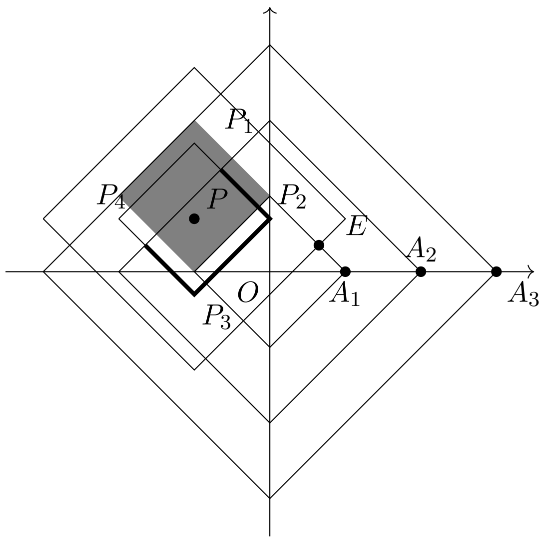

Рис.6: Случай 4.

Данный пункт доказывается аналогично предыдущему.

5. Рассмотрим область $M_4 = \{(x, y) : \rho((x, y), (-2d, 0)) < d, y \geq 0\}$.

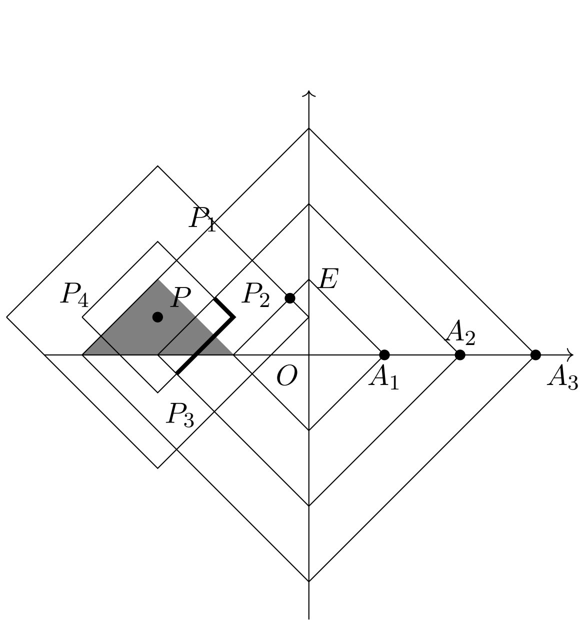

Рис.7: Случай 5.

В данном случае все точки пересечения $(O, d) \cap [P, 2d]$ равноудалены от точки A_1, поэтому можно выбрать в качестве E любую из двух точек пересечения $(O, d) \cap (P, 2d)$. Дальше доказательство аналогично предыдущему пункту.

6. Рассмотрим границы областей 1-5.

Если точка P находится на границе рассмотренных ранее областей, то в пересечение манхэттенских окружностей (P, d) и (A_1, d) или (E, d) попадает точка, которая находится ближе всего к A_2 среди точек, в которые мы можем поместить A'_2. Далее доказательство аналогично предыдущим пунктам.

Конец доказательства.

3.2. Доказательство теоремы 2

Лемма 1. *Пусть A — манхэттенская цепочка, и P — точка на плоскости. Результатом работы алгоритмов* A1 *и* A2 *является отстутствие манхэттенской цепочки, полученной из A перемещением конца в точку P, тогда и только тогда, когда P лежит вне области допустимых положений конца манхэттенской цепочки A.*

Доказательство. Алгоритм A1 выдаёт в качестве ответа отсутствие нужной манхэттенской цепочки тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{D}^1$ пусто. Это происходит тогда и только тогда, когда манхэттенская окружность $(O, d_{0,1})$ и манхэттенский круг $[P, \sum_{k=1}^{n-1} d_{k,k+1}]$ не пересекаются, то есть тогда и только тогда, когда P лежит вне области допустимых положений конца манхэттенской цепочки A.

Для алгоритма A2 утверждение доказывается таким же образом. Лемма доказана.

В рассмотренных в предыдущей теореме областях на манхэттенской окружности с центром в такой точке, которая ближе всех к A_1 из всех возможных, лежала точка, ближайшая к A_2 из всех возможных. В области $\{(x, y) : \rho((x, y), O) \leq d\}$ такого не происходит, поэтому, чтобы получить манхэттенскую цепочку, находящуюся на минимальном расстоянии от данной, в некоторых случаях нам придётся переместить конец первого звена не в ближайшую к A_1 точку, и алгоритм A1 работает неверно. Аналогично не всегда работает верно алгоритм A2. Докажем, что для этой области правильно работает алгоритм A3, выбирающий наиболее подходящий ответ из результатов работы алгоритмов A1 и A2.

Будем рассматривать только область $\{(x, y) : \rho((x, y), O) \leq d, y \geq 0\}$, так как оставшаяся часть области $\{(x, y) : \rho((x, y), O) \leq d\}$ симметрична, и для неё теорема доказывается также.

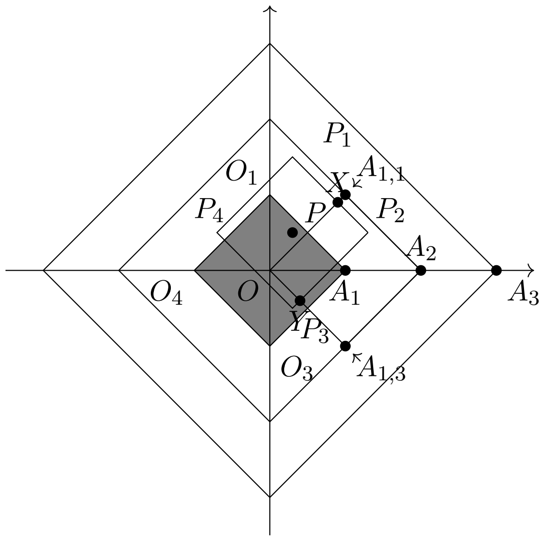

Рис.8: Случай, когда т. P находится на расстоянии меньше или равно d от начала цепочки.

Обозначим через $OA_{1,1}A_2A_{1,3}$ манхэттенскую окружность (A_1, d).

Обозначим X и Y точки пересечения манхэттенских окружностей (P, d) и (A_1, d). Пусть $r_1 = \rho(A_{1,3}, Y)$, $r_2 = \rho(A_{1,1}, X)$.

Возьмём точку A_1'' на манхэттенской окружности (O, d). Обозначим через D'' пересечение $(P, d) \cap (A_1'', d)$, через D — пересечение $(P, d) \cap (A_1, d)$.

Через $OA_1'A_2'P$ обозначим манхэттенскую цепочку, находящуюся на минимальном расстоянии от $OA_1A_2A_3$ и полученную из неё перемещением конца манхэттенской цепочки в точку P.

Пусть точка $A_1'' \in A_1O_1$ и $\rho(A_1'', A_1) < r_1$, либо $A_1'' \in A_1O_3$ и $\rho(A_1'', A_1) < r_2$. Построим манхэттенскую окружность с центром в точке A_1'' и радиусом d. Она пересекает манхэттенскую окружность (P, d) в двух точках X'' и Y'', причём

$$\rho(A_2, \arg\min_{x \in D}(\rho(A_2, x)) \leq \rho(A_2, \arg\min_{x \in D''}(\rho(A_2, x)))$$

То есть при данных положениях точки A_1'' минимальное расстояние до возможных положений конца второго звена будет больше, чем если мы оставим конец первого звена на своём месте. Поэтому мы можем не рассматривать данные положения точки A_1'' в качестве возможных положений точки A_1'.

Пусть точка $A_1'' \in A_1O_1$ и $\rho(A_1'', A_1) = r_1$, либо $A_1'' \in A_1O_3$ и $\rho(A_1'', A_1) = r_2$. В этом случае в D'' входит точка P_2, которая является ближайшей к точке A_2 на манхэттенской окружности (P, d). Она не входит в множество D.

При $A_1'' \in O_1O_4 \cup O_3O_4$, при $A_1'' \in A_1O_1$ и $\rho(A_1, A_1'') > r_1$, при $A_1'' \in A_1O_3$ и $\rho(A_1, A_1'') > r_2$ манхэттенское расстояние между точкой A_2 и точками множества D'' будет больше или равно расстояния $\rho(A_2, P_2)$, так как P_2 — ближайшая к A_2 точка на манхэттенской окружности (P, d). При этом расстояние $\rho(A_1, A_1'')$ будет больше, чем при ранее рассматриваемых случаях. Значит, для нахождения манхэттенской цепочки, находящейся на минимальном расстоянии от данной и полученной переводом конца в точку P, мы можем ограничиться лишь рассмотрением случаев, когда $A_1'' = A_1$ и когда $P_2 \in D''$.

Обозначим через $\hat{A}_1$ положение A_1'', при котором $P_2 \in D''$ и $\rho(A_1, A_1'')$ минимально. Возможны два случая:

- $0 + \rho(A_2, \arg\min_{x \in D}(\rho(A_2, x)) + \rho(P, A_3) \leq$
  $\leq \rho(A_1, \hat{A}_1) + \rho(A_2, P_2) + \rho(P, A_3)$.

- $0 + \rho(A_2, \arg\min_{x \in D}(\rho(A_2, x)) + \rho(P, A_3) >$
  $> \rho(A_1, \hat{A}_1) + \rho(A_2, P_2) + \rho(P, A_3)$.

В первом случае для минимизации расстояния между манхэттенскими цепочками в качестве конца первого звена A_1' выбираем точку A_1, а в качестве конца второго звена A_2' — ближайшую к A_2 точку пересечения манхэттенских окружностей (P, d) и (A_1', d). В этом случае $\rho(OA_1A_2A_3, OA_1'A_2'P)$ будет минимальным. Это соответствует действиям в алгоритме А4.

Во втором случае мы выбираем P_2 в качестве A'_2, а в качестве A'_1 — ближайшую к A_1 точку пересечения манхэттенских окружностей (O, d) и (P_2, d). Это соответствует действиям, описываемым в алгоритме A5.

Таким образом, в заданной области всегда верен результат одного из алгоритмов A1 или A2.

Для области $\{(x, y) : \rho((x, y), O) < d\}$ теорема доказана.

Для точек вне области допустимых положений конца цепочки A теорема следует непосредственно из леммы 1. Для оставшейся области теорема следует из теоремы 1.

Теорема доказана.

4. Заключение

В работе рассмотрены три алгоритма перевода конца манхэттенской цепочки в заданную точку. Для прямых манхэттенских цепочек длины 3 указана область, в которой эти алгоритмы выдают оптимальное решение.

Список литературы

[1] Голиков К.А., "Алгоритм обучения систем с дискретным управлением", *Интеллектуальные системы: теория и приложения*, **23**:1 (2019), 7-38.

[2] Голиков К.А., "Обучение систем с дискретным управлением", *Интеллектуальные системы: теория и приложения*, **22**:4 (2018), 143-151.

[3] Бергер И.О., "Алгоритмы перевода конца цепочки в заданную точку", *Интеллектуальные системы: теория и приложения*, **21**:3 (2017), 41-64.

Algorithms of moving of the end of the chain to the given point in space with the taxicab metric

Berger I.O.

The paper considers the problem of moving a three-link chain with one fixed edge from the initial position to the position in which the second edge is placed in a given point. The initial position is the position at which all chain links lie on the abscissa axis. Moreover, each chain link has a fixed length, but it can bend at an angle of 90 degrees at any point. The paper proposes an algorithm that minimizes the distance between the initial and final positions of the chain, and the distance measure is based on the metric of taxicab geometry.

Keywords: Manhattan chains, Manhattan distance, algorithm, taxicab geometry.

References

[1] Golikov K.A., "Learning algorithm of systems with discrete control", *Intelligent systems: theory and applications*, **23**:1 (2019), 7-38 (in Russian).

[2] Golikov K.A., "Learning systems with descrete control", *Intelligent systems: theory and applications*, **22**:4 (2018), 143-151 (in Russian).

[3] Berger I.O., "Algorithms of moving of the end of chain to the given point", *Intelligent systems: theory and applications*, **21**:3 (2017), 41-64 (in Russian).