Корректность базисной логики относительно абсолютной L-реализуемости

А. Ю. Коновалов[1]

Для каждого счетного расширения L языка арифметики определяется абсолютная L-реализуемость предикатных формул. Доказывается, что базисная логика является корректной относительно этих семантик.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, абсолютная реализуемость, формальная арифметика, базисная логика.

Понятие абсолютной L-реализуемости для предикатных формул, где L — произвольное расширение языка арифметики, впервые появляется в работах [1], [2], в которых показана некорректность интуиционистской логики предикатов относительно семантики абсолютной L-реализуемости. Таким образом, возникает вопрос о поиске более слабых исчислений, для которых бы семантика абсолютной L-реализуемости была бы корректна. Одним из таким таких исчислений может служить базисная логика предикатов BQC [3]. В настоящей работе показана корректность исчисления BQC относительно семантики абсолютной L-реализуемости. Аналогичный результат был ранее получен автором для семантик арифметической [4], гиперарифметической [5] и общерекурсивной [6] реализуемостей.

Перейдем к формальному изложению. Будем считать, что язык арифметики LA содержит обозначения для всех примитивно рекурсивных функций, а также константы для обозначения всех натуральных чисел. Расширение LA' языка LA получается добавлением к LA предикатных символов P_i^n и функциональных символов f_i^n для всех $i \geq 0,\ n \geq 1$. Валентность символов P_i^n и f_i^n полагается равной n. Формулы языка LA' строятся обычным образом из атомов и логических констант $\top, \bot$ при помощи логических связок $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и кванторов $\exists$, $\forall$. Выражение $\neg A$ условимся рассматривать как сокращение для формулы $A \rightarrow \bot$. Бу-

[1] *Коновалов Александр Юрьевич* — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. лаб. математических проблем искусственного интеллекта каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: konoval@yopmail.com.

Konovalov Aleksandr Yurevich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems, Laboratory of Mathematical Problem of Artificial Intelligence.

дем считать, что фиксирована геделева нумерация языка LA'. Формулу языка LA' с геделевым номером z обозначаем через Φ_z.

Фиксируем расширение L языка LA и интерпретацию $\mathcal{N}_L$ языка L такие, что L — подъязык языка LA', а интерпретация $\mathcal{N}_L$ является продолжением стандартной интерпретацией языка LA. *Униформизацией* формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ языка L, не содержащей параметров, отличных от $x_1, \ldots, x_n, y$, будем называть формулу

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge (\forall y_1 < y)\, \neg\Phi(x_1, \ldots, x_n, y_1),$$

которую обозначим $\Phi^U(x_1, \ldots, x_n, y)$. Каждая такая формула задает частичную функцию $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, где $f(k_1, \ldots, k_n) = k$, если и только если $\mathcal{N}_L \models \Phi^U(k_1, \ldots, k_n, k)$, т. е. формула $\Phi^U(k_1, \ldots, k_n, k)$ истинна в интерпретации $\mathcal{N}_L$. Через I_n^L обозначаем множество геделев номеров формул языка L, не содержащих параметров отличных от $x_1, \ldots, x_n, y$. Если $z \in I_n^L$, то посредством $\varphi_z^{L,\,n}$ обозначим n-местную частичную функцию, задаваемую формулой Φ_z^U. В выражениях вида $\varphi_z^{L,\,n}$ обычно будем опускать второй верхний индекс там, где он может быть восстановлен из контекста.

Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов $P(v_1, \ldots, v_n)$, где P есть n-местная предикатная переменная, а $v_1, \ldots, v_n$ — предметные переменные, при помощи логических констант $\top$, $\bot$, связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x, y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x, y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t)$, $\mathsf{p}_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Следуя [8], n-местным обобщенным предикатом будем называть всякую функцию типа $\mathbb{N}^n \to 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A ставит в соответствие обобщенный предикат соответствующей валентности. В этом случае отображение f будем называть оценкой формулы A. Временно введем в язык логики предикатов константы для обозначения всех натуральных чисел. Формулы с этими константами будем называть предикатными формулами расширенного языка.

Для каждого натурального числа e, произвольной замкнутой предикатной формулы расширенного языка A и оценки f определим отношение $e\, \mathbf{r}_f^L\, A$ (число e реализует A при оценке f):

1) неверно $e\, \mathbf{r}_f^L\, \bot$;

2) верно $e\, \mathbf{r}_f^L\, \top$;

3) $e\, \mathbf{r}_f^L\, P(a_1, \ldots, a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1, \ldots, a_n)$, если P есть n-местная предикатная переменная;

4) $e\,\mathbf{r}^L_f\,(\Phi\wedge\Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\,\mathbf{r}^L_f\,\Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^L_f\,\Psi$;

5) $e\,\mathbf{r}^L_f\,(\Phi\vee\Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e=0$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^L_f\,\Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e=1$ и $\mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^L_f\,\Psi)$;

6) $e\,\mathbf{r}^L_f\,\exists x\,\Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_2 e\,\mathbf{r}^L_f\,\Phi(\mathsf{p}_1 e)$;

7) $e\,\mathbf{r}^L_f\,\forall x_1,\ldots,x_n\,(\Phi(x_1,\ldots,x_n)\to\Psi(x_1,\ldots,x_n)) \rightleftharpoons e\in I^L_{n+1}$ и для всех[1] натуральный чисел $s,\ a_1,\ldots,a_n$, если $s\,\mathbf{r}^L_f\,\Phi(a_1,\ldots,a_n)$, то определено $\varphi^L_e(a_1,\ldots,a_n,s)$ и имеет место $\varphi^L_e(a_1,\ldots,a_n,s)\,\mathbf{r}^L_f\,\Psi(a_1,\ldots,a_n)$;

8) $e\mathbf{r}^L_f\forall x_1,\ldots,x_n\,\Phi \rightleftharpoons e\mathbf{r}^L_f\forall x_1,\ldots,x_n\,(\top\to\Phi)$, если $n>0$, формула Φ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\to$ не является главной в Φ.

Будем говорить, что замкнутая предикатная формула A является *абсолютно L-реализуемой*, если для любой оценки f формулы A найдется такое натуральное число e, что $e\,\mathbf{r}^L_f\,A$. По аналогии с определением примитивно рекурсивно реализуемой секвенции из работы С. Салехи [7] распространим на секвенции понятие абсолютной L-реализуемости.

$$e\,\mathbf{r}^L_f\,A(\overline{x})\Rightarrow B(\overline{x}) \rightleftharpoons e\,\mathbf{r}^L_f\,\forall\overline{x}\,(A(\overline{x})\to B(\overline{x})),$$

где $\overline{x}=x_1,\ldots,x_n$. Будем говорить, что секвенция $A\Rightarrow B$ является *абсолютно L-реализуемой*, если для любой оценки f предикатных формул A и B найдется такое натуральное число e, что $e\,\mathbf{r}^L_f\,A\Rightarrow B$.

Базисная логика предикатов в виде секвенциального исчисления BQC описана в [3]. Мы будем рассматривать вариант исчисления BQC в языке без предметных констант, функциональных символов и равенства. Этот фрагмент задается следующими схемами аксиом, где $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{t}$ — списки предметных переменных:

A1) $A\Rightarrow A$;

A2) $A\Rightarrow\top$;

A3) $\bot\Rightarrow A$;

A4) $A\wedge\exists x\,B\Rightarrow\exists x\,(A\wedge B)$, где переменная x не свободна в A;

A5) $A\wedge(B\vee C)\Rightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$;

A6) $\forall\mathbf{x}\,(A\to B)\wedge\forall\mathbf{x}\,(B\to C)\Rightarrow\forall\mathbf{x}\,(A\to C)$;

A7) $\forall\mathbf{x}\,(A\to B)\wedge\forall\mathbf{x}\,(A\to C)\Rightarrow\forall\mathbf{x}\,(A\to B\wedge C)$;

A8) $\forall\mathbf{x}\,(B\to A)\wedge\forall\mathbf{x}\,(C\to A)\Rightarrow\forall\mathbf{x}\,(B\vee C\to A)$;

A9) $\forall\mathbf{x}\,(A(\mathbf{x})\to B(\mathbf{x}))\Rightarrow\forall\mathbf{x}\,(A(\mathbf{t})\to B(\mathbf{t}))$, где $\mathbf{t}$ — список переменных, каждая из которых свободна для соответствующей переменной в формулах $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$;

A10) $\forall\mathbf{x}(A(\mathbf{x})\to B(\mathbf{x}))\Rightarrow\forall\mathbf{y}(A(\mathbf{x})\to B(\mathbf{x}))$, где каждая переменная из списка $\mathbf{y}$ не входит свободно в левую часть секвенции;

[1] Однако, если в списке $x_1,\ldots,x_n$ на некоторых позициях i и j стоят одинаковые переменные x_i и x_j, то мы не допускаем рассмотрение тех списков $a_1,\ldots,a_n$, в которых $a_i\neq a_j$.

A11) $\forall \mathbf{x}, x\,(B \to A) \Rightarrow \forall \mathbf{x}\,(\exists x\, B \to A)$, где переменная x не свободна в A.

Исчисление BQC имеет следующие правила вывода:

R1) $\dfrac{A \Rightarrow B \; B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$;

R2) $\dfrac{A \Rightarrow B \; A \Rightarrow C}{A \Rightarrow B \wedge C}$;

R3) $\dfrac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow B}$ (а), $\dfrac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow C}$ (б);

R4) $\dfrac{B \Rightarrow A \; C \Rightarrow A}{B \vee C \Rightarrow A}$;

R5) $\dfrac{B \vee C \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}$ (а), $\dfrac{B \vee C \Rightarrow A}{C \Rightarrow A}$ (б);

R6) $\dfrac{A(\mathbf{x}) \Rightarrow B(\mathbf{x})}{A(\mathbf{t}) \Rightarrow B(\mathbf{t})}$, где каждая переменная из списка $\mathbf{t}$ свободна для соответствующей переменной из списка $\mathbf{x}$ в формулах $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$;

R7) $\dfrac{B \Rightarrow A}{\exists x\, B \Rightarrow A}$, где переменная x не свободна в A;

R8) $\dfrac{\exists x\, B \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}$, где переменная x не свободна в A;

R9) $\dfrac{A \wedge B \Rightarrow C}{A \Rightarrow \forall \mathbf{x}(B \to C)}$, где каждая переменная из списка $\mathbf{x}$ не свободна в A.

Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Всякая выводимая в базисной логике предикатов секвенция является абсолютно L-реализуемой.*

Доказательство теоремы 1 осуществляется индукцией по построению вывода в исчислении BQC. Ход доказательства с незначительными изменениями повторяет [4, теорема 2].

Если в исчислении BQC выводится секвенция $\top \Rightarrow A$, то в этом случае говорят, что формула A выводится в BQC. Следующая теорема получается как следствие из теоремы 1.

Теорема 2. *Всякая замкнутая предикатная формула, выводимая в базисной логике предикатов, является абсолютно L-реализуемой.*

Понятие L-реализуемости является прямым обобщением арифметической [4] и гиперарифметической [5] реализуемостей. Еще большего уровня абстракции можно достичь, если использовать в определении реализуемости вместо какого-то конкретного класса функций произвольный класс функций V, свойства которого задаются аксиоматически. Понятие V-реализуемости определяется в статьях [9], [10] для формул языка арифметики. В работах [11], [12], [13] рассматриваются различные варианты определения понятия V-реализуемости для предикатных формул и исследуется корректность классической логики и принципа Маркова относительно V-реализуемости. В дальнейшей работе планируется обобщить полученные для L-реализуемости результаты о интуиционистской и базисной логиках на V-реализуемость.

Список литературы

[1] А. Ю. Коновалов, "Некорректность интуиционистской логики относительно L-реализуемости", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:3 (2018), 41–44.

[2] А. Ю. Коновалов, "Абсолютная L-реализуемость и интуиционистская логика", *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.*, 2019, № 2, 50–53.

[3] W. Ruitenburg, "Basic predicate calculus", *Notre Dame J. Formal Logic*, **39**:1 (1998), 18–46.

[4] А. Ю. Коновалов, "Арифметическая реализуемость и базисная логика", *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.*, 2016, № 1, 52–56.

[5] В. Е. Плиско, А. Ю. Коновалов, "О гиперарифметической реализуемости", *Математические заметки*, **98**:5 (2015), 725–746.

[6] А. Ю. Коновалов, "Общерекурсивная реализуемость и базисная логика", *Алгебра и логика*, **59**:5 (2020), 542–566.

[7] S. Salehi, "Provably total functions of Basic Arithmetic", *Mathematical Logic Quarterly*, **49**:3 (2003), 316–322.

[8] В. Е. Плиско, "Абсолютная реализуемость предикатных формул", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:2 (1983), 315–334.

[9] А. Ю. Коновалов, "Критерий совпадения V-реализуемости формул расширения L языка арифметики с классической семантикой языка L", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:3 (2018), 127–130.

[10] А. Ю. Коновалов, "Обобщенная реализуемость для расширений языка арифметики", *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.*, 2019, № 4, 50–54.

[11] А. Ю. Коновалов, "Условие корректности и полноты классической логики для семантики относительной V-реализуемости", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:1 (2019), 133–136.

[12] А. Ю. Коновалов, "Равномерная V-реализуемость принципа Маркова в V-перечислимой области", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:1 (2019), 99–103.

[13] А. Ю. Коновалов, "Обобщенная реализуемость и принцип Маркова", *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.*, 2020, № 1, 60–64.

Basic Logic is sound with respect to absolute L-realizability

Konovalov A.Yu.

An absolute L-realizability of predicate formulas is introduced for all countable extensions L of the language of arithmetic. It is proved that the basic logic is sound with this semantics.

Keywords: constructive semantics, realizability, absolute realizability, formal arithmetic, basic logic.

References

[1] A. Yu. Konovalov, "Nekorrektnost' intuicionistskoj logiki otnositelno L-realizuemosti [Intuitionistic Logic is not sound with respect to the L-realizability]", *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, **22**:3 (2018), 41–44 (in Russian), http://mi.mathnet.ru/ista148.

[2] A. Yu. Konovalov, "Absolute L-realizability and intuitionistic logic", *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:2 (2019), 79–82 (in Russian), DOI: 10.3103/S0027132219020086.

[3] W. Ruitenburg, "Basic predicate calculus", *Notre Dame J. Formal Logic*, **39**:1 (1998), 18–46, DOI: 10.1305/ndjfl/1039293019.

[4] A. Yu. Konovalov, "Arithmetical realizability and basic logic", *Moscow University Mathematics Bulletin*, **71**:1 (2016), 35–38 (in Russian), DOI: 10.3103/S0027132216010071.

[5] V. E. Plisko, A. Yu. Konovalov, "On hyperarithmetical realizability", *Mathematical Notes*, **98**:5 (2015), 778–797 (in Russian), DOI: 10.1134/S0001434615110073.

[6] A. Yu. Konovalov, "General Recursive Realizability and Basic Logic", *Algebra and Logic*, **59** (2020), 367–384 (in Russian), DOI: 10.1007/s10469-020-09610-y.

[7] S. Salehi, "Provably total functions of Basic Arithmetic", *Mathematical Logic Quarterly*, **49**:3 (2003), 316–322, DOI: 10.1002/malq.200310032.

[8] V. E. Plisko, "Absolute realizability of predicate formulas", *Mathematics of the USSR - Izvestiya*, **22**:2 (1984), 291–308 (in Russian), DOI: 10.1070/IM1984v022n02ABEH001444.

[9] A. Yu. Konovalov, "Kriterij sovpadeniya V-realizuemosti formul rasshireniya L yazyka arifmetiki s klassicheskoj semantikoj yazyka L [The V-realizability for L-formulas coincides with the classical semantics iff V contains all L-definable functions]", *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, **22**:3 (2018), 127–130 (in Russian), http://mi.mathnet.ru/eng/ista153.

[10] A. Yu. Konovalov, "Generalized Realizability for Extensions of the Language of Arithmetic", *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:4 (2019), 167–170 (in Russian), DOI: 10.3103/S0027132219040065.

[11] A. Yu. Konovalov, "Uslovie korrektnosti i polnoty klassicheskoj logiki dlya semantiki otnositel'noj V-realizuemosti [The condition for soundness and completeness of Classical Logic with respect to the semantics of relative V-realizability]", *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, **23**:1 (2019), 133–136 (in Russian), http://intsysjournal.org/pdfs/23-1/Konovalov2.pdf.

[12] A. Yu. Konovalov, "Ravnomernaya V-realizuemost' principa Markova v V-perechislimoj oblasti [Markov's Principle is uniformly V-realizable in any V-enumerable domain]", *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, **23**:1 (2019), 99–103 (in Russian), http://mi.mathnet.ru/eng/ista219.

[13] A. Yu. Konovalov, "Generalized Realizability and Markov's Principle", *Moscow University Mathematics Bulletin*, **75**:1 (2020), 38–41 (in Russian), DOI: 10.3103/S0027132220010064.