Проблема типовой встречи для автоматов в лабиринтах

Г. Д. Килибарда[1]

В статье рассматривается один специальный тип взаимодействия коллективов автоматов в лабиринтах. Для данного класса лабиринтов решается, относительно всех типов коллективов автоматов, следующая проблема: для каких пар типов существуют коллектив первого типа и коллектив второго типа такие, что если их в начальный момент поместить в любые две вершины любого лабиринта из данного класса лабиринтов, то они обязательно когда-то встретятся. Эту проблему называем проблемой типовой встречи (type meeting) для автоматов в данном классе лабиринтов. Здесь эта задача полностью решена как для случая класса всех конечных плоских мозаичных лабиринтов, так и для случая класса всех конечных плоских прямоугольных лабиринтов. В случае класса всех (конечных и бесконечных) плоских мозаичных лабиринтов для некоторых пар типов коллективов проблема типовой встречи пока остается открытой, а в случае класса всех плоских прямоугольных лабиринтов она все еще является полностью неисследованной.

Ключевые слова: коллектив автоматов, тип коллектива автоматов, плоский прямоугольный лабиринт, плоский мозаичный лабиринт, типовая встреча.

1. Введение

Рассматриваемые в настоящей статье лабиринты лежат в плоскости, и любой из их “коридоров” параллелен или x-оси, или y-оси; назовем эти лабиринты плоскими прямоугольными лабиринтами. В первой части статьи рассматриваются плоские прямоугольные лабиринты, у которых все “коридоры” (ребра) единичной длины; эти лабиринты назовем плоскими мозаичными лабиринтами. В лабиринтах этих типов будем рассматривать коллективы автоматов с камнями.

Камни являются специальным типом неразрушимых “мобильных” вершинных маркеров. Каждый автомат коллектива видит только камни, располагающиеся в вершине, в которой он оказался в текущий момент времени; он может взять некоторые из этих камней и положить их в вершину, в которой он оказывается в следующий момент дискретного времени. Конечно, такое поведение автомата (то есть, со сколькими и какими

[1] *Килибарда Горан* — доктор математических наук, профессор Факультета бизнеса и права «МБ» университета, e-mail: gkilibar@gmail.com.

Kilibarda Goran — professor, “MB” University, Faculty of Business and Law, Belgrade.

камнями он проделывает эту операцию) зависит от его “входной информации”. Мы также предполагаем, что сами по себе камни не двигаются и что в данный момент любой камень может быть передвинут только одним из видящих его автоматов. Количество камней в таком коллективе конечно и в течение времени не меняется. В настоящей статье камень моделируем специальным типом автомата с одним состоянием. Данный коллектив автоматов является коллективом автоматов типа (r, s), если содержит r автоматов и s камней.

Любой автомат такого коллектива, оказавшись в момент t в вершине x некоторого прямоугольного лабиринта и находясь в состоянии q, двигается в направлении ω вдоль одного из “коридоров”, выходящих из x (очевидно, для ω возможны только 4 различных значения), и в момент $t+1$ переходит в состояние q' и в вершину x', которая является концом выбранного “коридора” (как выше сказано, он также может передвинуть $n \geq 0$ камней из x в x'). Значение ω, q' и проделанная операция с камнями зависит от q и от “входной информации” в момент t для рассматриваемого автомата, которая включает в себя следующую информацию: какие из других автоматов данного коллектива оказались в x в момент t и какие у них состояния в тот момент; какие камни (или как вариант — только количество камней) рассматриваемый автомат видит в момент t и какое есть множество направлений ‘коридоров”, выходящих из x.

В общем случае, один из вариантов проблемы, которую мы здесь рассматриваем, может быть описан следующим способом. Пусть $\mathcal{L}$ — класс лабиринтов, и (r, s) — некоторый тип коллектива автоматов. Говорим, что тип (r, s) решает проблему типовой встречи для автоматов в классе $\mathcal{L}$, если существуют коллективы автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ типа (r, s) такие, что для любого $L \in \mathcal{L}$ и любых вершин x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, лабиринта L, коллективы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, положенные в момент 0 соответственно в вершины x_1 и x_2 (т.е., в момент 0, любой из автоматов коллектива $\mathcal{A}_1$ помещается в вершину x_1, а любой из автоматов коллектива $\mathcal{A}_1$ в вершину x_2), встречаются в какой-то момент t (т.е., в момент t хотя бы один из автоматов коллектива $\mathcal{A}_1$ и хотя бы один из автоматов коллектива $\mathcal{A}_2$ оказываются в одной и той же вершине лабиринта $\mathcal{L}$). Наша задача состоит в том, чтобы для некоторых классов прямоугольных лабиринтов вычислить какие типы коллективов автоматов решают проблему типовой встречи для автоматов в этих классов лабиринтов.

Проблема типовой встречи для автоматов, так как она здесь описана, впервые представлена в [1]. Однако анонсированный там, а потом и в статьях [2] и [3], результат является не совсем точным.

2. Некоторые основные понятия, обозначения и результаты теории автоматов в лабиринтах

Сначала уточним, как мы будем употреблять некоторые обозначения и термины, которыми будем пользоваться.

Множество всех подмножеств [непустых подмножеств] множества X обозначаем через $\mathcal{P}(X)$ $[\mathcal{P}_0(X)]$. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — некоторые множества. Для любых $1 \leq i \leq n$, через pr_i обозначим проекцию прямого произведения $X_1 \times \cdots \times X_n$ на X_i.

Через A^* обозначим множество всех слов в алфавите A, через A^+ — множество всех непустых слов из A^* и через Λ — пустое слово.

Простым орграфом назовем орграф без петель и кратных дуг. Для любой дуги (x, y) данного простого орграфа, дуга (y, x), если она существует, называется противоположной для дуги (x, y), а пара (множество) дуг (x, y) и (y, x), в обозначении $\langle x, y \rangle$, называется парой противоположных дуг или ребром данного простого орграфа. Простой орграф называется симметричным, если для любой его дуги существует противоположная.

Пусть

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

— ортонормированный базис n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Положим, что

$$\mathfrak{D}_n = \{-\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}.$$

В случае, когда $n = 2$, вместо обозначении ε_1, ε_2, $-\varepsilon_1$ и $-\varepsilon_2$ используем, соответственно, обозначения $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{w}$ и $\mathbf{s}$ (элементы $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{w}$ и $\mathbf{s}$ множества $\mathfrak{D}_2$ интерпретируем также как части света: восток, север, запад и юг соответственно).

Определим на $\mathfrak{D}_n$ унарную операцию $\cdot^{-1}$, такую что $\omega^{-1} = \overline{\omega} = -\omega$ для любого $\omega \in \mathfrak{D}_n$. Расширим область определения операции $\cdot^{-1}$ на множество $\mathfrak{D}_n^*$ следующим способом: если $\alpha = \omega_1 \ldots \omega_n \in \mathfrak{D}_n^+$, то $\alpha^{-1} = \omega_n^{-1} \ldots \omega_1^{-1}$, а также положим, что $\Lambda^{-1} = \Lambda$.

Связный симметричный простой орграф с разметкой дуг (L, f), $L = (V, E)$, где V — множество его вершин, E — множество его дуг и $f \colon E \to \mathfrak{D}_n$ — разметка дуг орграфа L, называется *n-мерным лабиринтом* (или просто *n-лабиринтом*), если $f[(y, x)] = (f[(x, y)])^{-1}$ для любой дуги $(x, y) \in E$, и если $f(u) \neq f(v)$ для любых дуг $u, v \in E$, $u \neq v$, удовлетворяющих условию $\mathrm{pr}_1(u) = \mathrm{pr}_1(v)$.

Пусть $|u|_L = f(u)$ для любого $u \in E$. Также, для любой вершины $x \in V$, пусть $[x]_L = \{|u|_L \mid u \in E \text{ и } \mathrm{pr}_1(u) = x\}$. Когда ясно из контекста, о каком n-лабиринте L идет речь, вместо $|u|_L$ и $[x]_L$ мы пишем $|u|$ и $[x]$

соответственно. Добавим к $\mathfrak{D}_n$ новый элемент, который обозначим через $\mathbf{0}$, и расширим область определения отображения f на упорядоченные пары (x, x), $x \in V$, таким образом, что $|(x, x)| = \mathbf{0}$ для любого $x \in V$.

Далее, всегда опускаем символ f в обозначении n-лабиринта (L, f) предполагая, что в любом конкретном случае разметка f определена. Иногда множество вершин и множество дуг n-лабиринта L обозначаем через $V(L)$ и $E(L)$ соответственно. Если множество $V(L)$ конечно, то n-лабиринт L называется *конечным*; в противоположном случае L называется *бесконечным*. В дальнейшем все n-лабиринты являются конечными, если не сказано иначе.

Пусть L — некоторый n-лабиринт. Для любого маршрута ρ в L, определим слово $|\rho|$ следующим способом: если $\rho = x_0, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n$ для некоторого $n \geq 1$, тогда $|\rho| = |e_1| \ldots |e_n|$; если ρ — нуль-маршрут (содержащий только одну вершину), тогда $|\rho| = \Lambda$. Для любых $x \in V(L)$ и $\alpha \in \mathfrak{D}_n^*$, если в L существует маршрут ρ, у которого x начальная вершина и $|\rho| = \alpha$, тогда через $(x\alpha)_L$ или через $x\alpha$ (когда из контекста ясно, о каком n-лабиринте L идет речь) обозначим конечную вершину от ρ. Значит, $x\Lambda = x$ для любого $x \in V(L)$.

Если $\rho_1 = x_0, e_1, x_1, \ldots, e_m, x_m$ и $\rho_2 = y_0, e'_1, y_1, \ldots, e'_n, y_n$ — два маршрута в L и $y_0 = x_m$, то через $\rho_1 + \rho_2$ обозначим маршрут

$$x_0, e_1, x_1, \ldots, e_m, x_m, e'_1, y_1, \ldots, e'_n, y_n.$$

Пусть L — некоторый n-лабиринт и x — некоторая его вершина. Для любых слов $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{D}_n^*$, если существует вершина $x\alpha_2$ и существует вершина $x' \in V(L)$ такая, что $x = x'\alpha_1$, тогда через $\overline{\alpha_1 x \alpha_2}$ обозначим маршрут ρ, у которого x' начальная вершина и $|\rho| = \alpha_1\alpha_2$.

Заменяя любую пару противоположных дуг n-лабиринта L на соответствующее ребро, получим граф $G(L)$; ребро в $G(L)$, соответствующее паре противоположных дуг (x, y) и (y, x) из L, обозначим через $\langle x, y\rangle$ или $\langle y, x\rangle$. n-лабиринт L является *деревом*, если граф $G(L)$ — дерево. n-лабиринт L называется *змеевидным*, если граф $G(L)$ — дерево, у которого все вершины степени ≤ 2. n-лабиринт L называется *циклическим*, если $G(L)$ — граф, у которого все вершины степени 2.

Пусть ρ — маршрут в n-лабиринте L. Маршрут ρ называется *древовидным*, если подграф графа $G(L)$, определенный всеми вершинами лабиринта L, через которые проходит этот маршрут, и всеми ребрами $\langle x, y\rangle$ такими, что хотя бы одна из дуг (x, y) и (y, x) принадлежит маршруту ρ, является деревом.

В n-лабиринте L можем выделить вершину x' [две различные вершины x' и x''] в роли *входа* [в роли *входа* и *выхода* соответственно]. Обозначим факт, что L является n-лабиринтом с входом x' [с входом x' и выходом x''] через $(L; x')$ (или через $(V(L), E(L); x')$) [$(L; x', x'')$ (или через $(V(L), E(L); x', x''))$]. Назовем n-лабиринт с входом (и возможно с выходом) 1-*инициальным* n-*лабиринтом*. Если L — 1-инициальный n-лабиринт с входом x' и выходом x'', тогда через L^{-1} обозначим тот же самый лабиринт, но с входом x'' и выходом x'.

Обобщим понятие 1-инициального n-лабиринта. Фиксируем целое число $m \geq 1$. Пусть L — некоторый n-лабиринт, пусть $\vec{x}_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \in [V(L)]^m$, и пусть $x_1 \in V(L)$ — вершина в L такая, что $x_1 \neq x_i^{(0)}$ для всех $1 \leq i \leq m$. Упорядоченная пара $(L; \vec{x}_0)$ [тройка $(L; \vec{x}_0, x_1)$] называется m-*инициальным* n-*лабиринтом* L с *входом* $\vec{x}_0$ [*входом* $\vec{x}_0$ и *выходом* x_1]. В случае, особенно когда не важно точно указать на вход лабиринта L или если из контекста ясно, какой точно вход у L, мы иногда просто говорим, что L — *инициальный* n-лабиринт (n-лабиринт, имеющий вход) или L — *инициальный* n-лабиринт с *валентностью* m, где m — длина кортежа, являющегося входом. Из-за краткости иногда обозначаем $(L; \vec{x}_0)$ через $L_{\vec{x}_0}$.

В m-инициальном n-лабиринте L вход и выход (если существует) иногда обозначаем через $x_{\mathrm{s}}(L)$ и $x_{\mathrm{f}}(L)$ соответственно.

Пусть M и N, $M \neq N$, — некоторые точки пространства $\mathbf{R}^n$. Через $\overline{MN}$ обозначим отрезок, концами которого являются данные точки, а через $|\overline{MN}|$ — длину этого отрезка. Вектор $\overrightarrow{MN}$ *идет в направлении* ε_i $[-\varepsilon_i]$ $(1 \leq i \leq n)$, если $\overrightarrow{MN} = \alpha\varepsilon_i$ $[\overrightarrow{MN} = -\alpha\varepsilon_i]$ для некоторого $\alpha > 0$.

Множество отрезков T в плоскости $\mathbf{R}^n$ называется *конфигурацией* (*отрезков*), если для любых двух отрезков из T может существовать только одна общая точка, и при этом если она существует, то она является концевой для обоих отрезков.

n-лабиринт $L = (V, E)$, $V \subseteq \mathbf{R}^n$, называется *прямоугольным*, если:

1) множество $T = \{\overline{xy} \,|\, (x, y) \in E\}$ является конфигурацией;

2) вектор $\overrightarrow{xy}$ идет в направлении $|(x, y)|$ для любой дуги $(x, y) \in E$;

3) $|B \cap V| < +\infty$ для любого открытого шара B в $\mathbf{R}^n$.

Если L прямоугольный n-лабиринт и при этом $|\overline{xy}| = 1$ для любой дуги $(x, y) \in E(L)$, то L называется *мозаичным* n-лабиринтом. Более того, мозаичный n-лабиринт M является *шахматным* n-*лабиринтом*, если для любых $x, y \in V(M)$ из $|\overline{xy}| = 1$ следует, что $(x, y) \in E(M)$.

В случае, когда $n = 2$, прямоугольный, мозаичный или шахматный n-лабиринт называем соответственно *плоским прямоугольным*, *плоским мозаичным* или *плоским шахматным* лабиринтом.

Для любого прямоугольного n-лабиринта L, множество

$$\overline{L} = \bigcup_{(x,y) \in E(L)} \overline{xy}$$

является его (*геометрической*) *реализацией*. Прямоугольный n-лабиринт L называется *ограниченным*, если $\operatorname{diam} \overline{L} < +\infty$; в противном случае, он называется *неограниченным*. Очевидно, что прямоугольный n-лабиринт L является неограниченным тогда и только тогда, когда он является бесконечным.

n-лабиринты L_1 и L_2 называются *изоморфными*, $L_1 \cong L_2$, если существует биекция $g\colon V(L_1) \to V(L_2)$, такая, что:

(1) g является изоморфизмом L_1 и L_2 как простых орграфов с разметками дуг, т.е. $(x, y) \in E(L_1)$ тогда и только тогда, когда $(g(x), g(y)) \in E(L_2)$ для любых $x, y \in V(L_1)$, и когда $|(x, y)|_{L_1} = |(g(x), g(y))|_{L_2}$ для любых $(x, y) \in E(L_1)$;

(2) если у одного из n-лабиринтов вход [вход и выход], то и у другого из них вход (вход и выход) и $x_{\mathrm{s}}(L_2) = (g(x_1), \ldots, g(x_n))$ [$x_{\mathrm{s}}(L_2) = (g(x_1), \ldots, g(x_n))$ и $x_{\mathrm{f}}(L_2) = g[x_{\mathrm{f}}(L_1)]$], где $x_{\mathrm{s}}(L_1) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Функция g называется *изоморфизмом* лабиринтов L_1 и L_2. Множество всех n-лабиринтов изоморфных n-лабиринту L обозначается через $[L]$.

Прямоугольный [мозаичный] m-инициальный n-лабиринт L, $m \geq 1$, с выходом $x_1 \in V(L)$ называется *регулярным* [*правильным*], если существует неограниченный прямоугольный [мозаичный] n-лабиринт L_1 такой, что $\overline{L} \cap \overline{L_1} = \{x_1\}$ и $x_1 \in V(L_1)$. Рис. 1 дает реализацию некоторого правильного мозаичного 2-лабиринта с входом x_0 и выходом x_1.

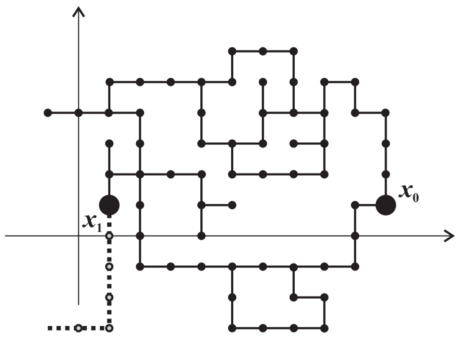


Рис. 1.

Поскольку в последующем мы в основном будем иметь дело с 2-лабиринтами, то из-за краткости в изложении, под лабиринтом, прямоугольным лабиринтом, мозаичным лабиринтом и шахматным лабиринтом мы подразумеваем 2-лабиринт, прямоугольный 2-лабиринт, мозаичный 2-лабиринт и шахматный 2-лабиринт соответственно. Также через $\mathfrak{D}$ обозначим множество $\mathfrak{D}_2$. Заметим, что некоторые понятия, которые в последующем вводим для 2-мерных лабиринтов только что указанных типов, можно легко обобщить на случай размерности n.

Под (конечным) автоматом подразумеваем набор $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, где конечные непустые множества A, Q и B являются множествами входов, состояний и выходов автомата $\mathfrak{A}$ соответственно; $\psi\colon Q \times A \to B$ — его функция выходов и $\varphi\colon Q \times A \to Q$ его функция переходов. Если выделим какое-то состояние q_0 автомата $\mathfrak{A}$, то набор $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ назовем инициальным автоматом. Для данного инициального или неинициального автомата $\mathfrak{A}$ через $A_{\mathfrak{A}}$, $Q_{\mathfrak{A}}$, $B_{\mathfrak{A}}$, $\psi_{\mathfrak{A}}$ и $\varphi_{\mathfrak{A}}$ обозначаем множества его входов, состояний и выходов, а также его функции выходов и переходов соответственно.

Автомат (инициальный или неинициальный) $\mathfrak{A}$ называется *допустимым*, если $A_{\mathfrak{A}} = \mathcal{P}(\mathfrak{D})$, $B_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{D} \cup \{\mathbf{0}\}$ и $\psi_{\mathfrak{A}}(q, a) \in a \cup \{\mathbf{0}\}$ для всех $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ и $a \in A_{\mathfrak{A}}$. Если $\mathfrak{A}$ $[\mathfrak{A}_{q_0}]$ — допустимый автомат, то для краткости пишем $\mathfrak{A} = (Q, \varphi, \psi)$ $[\mathfrak{A}_{q_0} = (Q, \varphi, \psi, q_0)]$ вместо $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ $[\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)]$.

Допустимый (инициальный или неинициальный) автомат $\mathfrak{A}$ называется *тривиальным*, если $\psi_{\mathfrak{A}}(q, a) = \mathbf{0}$ для любых $q \in Q_{\mathfrak{A}}$ и $a \in \mathcal{P}(\mathfrak{D})$.

Пусть A — некоторое непустое множество, пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A^n$ — некоторый упорядоченный набор элементов множества A длины n и пусть $\beta \in A$ — некоторый элемент из A. Для любого $1 \leq i \leq n$ через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n){\downarrow}(\beta; i)$ обозначим упорядоченный набор $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ такой, что $\alpha'_i = \beta$ и $\alpha'_j = \alpha_j$ для любого $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$. Для любых $1 \leq i \leq j \leq n$, через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|_i^j$ обозначим упорядоченный $j - i + 1$-набор $(\alpha_i, \ldots, \alpha_j)$.

В дальнейшем предполагаем, что ни одно состояние автоматов, о которых идет речь, не обозначено символом 0.

Упорядоченный n-набор $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, где $\mathfrak{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i)$ — автомат для любого $1 \leq i \leq n$, называется *допустимым коллективом автоматов* (или просто *коллективом автоматов*), если для любого $1 \leq i \leq n$,

$$A_i = \{a \in \mathcal{P}(\mathfrak{D}) \times \hat{Q}_1 \times \cdots \times \hat{Q}_n \,|\, \mathrm{pr}_{i+1}(a) = 0\},$$

где $\hat{Q}_j = Q_j \cup \{0\}$ для любого $1 \leq j \leq n$, $B_i = \mathfrak{D} \cup \{\mathbf{0}\}$ и $\psi_i(q, a) \in \mathrm{pr}_1(a) \cup \{\mathbf{0}\}$ для любых $q \in Q_i$ и $a \in A_i$. Обозначим число автоматов в коллективе $\mathcal{A}$, т.е., число n, через $|\mathcal{A}|$. Также, пусть $\hat{Q}_{\mathcal{A}} = \hat{Q}_1 \times \cdots \times \hat{Q}_n$.

Если для некоторых $1 \leq i \leq n$, $a \in A_i$ и $q \in Q_i$ имеет место $\varphi_i(q, a) = q$ $[\psi_i(q, a) = \mathbf{0}]$, тогда говорим, что функция φ_i $[\psi_i]$ является *тривиально определенной* в точке (q, a).

Поскольку множества Q_j, $1 \leq j \leq n$, и $B_1 = \cdots = B_n = \mathfrak{D} \cup \{\mathbf{0}\}$ единственным образом определяют множества A_i, $1 \leq i \leq n$,, то для любого $1 \leq i \leq n$ в обозначениях для автоматов из $\mathcal{A}$ для краткости пишем

(Q_i, φ_i, ψ_i) вместо $(A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i)$. Также, для любого $1 \le i \le n$ через $A_{\mathfrak{A}_i}$ обозначим множество A_i.

Множество $Q_{\mathcal{A}} = Q_1 \times \cdots \times Q_n$ есть *множество состояний* коллектива $\mathcal{A}$, и любой его элемент называется *состоянием* коллектива $\mathcal{A}$. Если выделенно некоторое $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in Q_{\mathcal{A}}$, то получаем *коллектив инициальных автоматов* $\mathcal{A}_{\vec{q}}$; это состояние $\vec{q}$ называется *инициальным состоянием* коллектива $\mathcal{A}$. Иногда вместо $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ пишем $((\mathfrak{A}_1)_{q_1}, \ldots, (\mathfrak{A}_n)_{q_n})$. Для любого $1 \le i \le n$, через $\mathcal{A}^{(i)}$ обозначим автомат $\mathfrak{A}_i$.

Коллектив автоматов $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, где $\mathfrak{A}_i = (Q_i, \varphi_i, \psi_i)$ для любого $1 \le i \le n$, называется *тривиальным* если $\psi_i(q, a) = \mathbf{0}$ для любых $q \in Q_i$, $a \in A_{\mathfrak{A}_i}$ и $1 \le i \le n$.

Путь L — лабиринт и $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ — коллектив автоматов. Для любых $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [V(L)]^n$, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in Q_{\mathcal{A}}$ и $1 \le i \le n$, через $a_i(\vec{q}, \vec{x})$ обозначим упорядоченный $n+1$-набор $([x_i]_L, a_1^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$, где

$$a_j^{(i)} = \begin{cases} q_j, & \text{если } x_j = x_i \text{ и } j \neq i; \\ 0, & \text{если } x_j \neq x_i \text{ или } j = i \end{cases}$$

для любого $1 \le j \le n$. Заметим, что всегда $a_i(\vec{q}, \vec{x}) \in A_{\mathfrak{A}_i}$.

Пусть $\vec{x}_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ и $\vec{x}_2 = (x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ — два упорядоченных n-набора из $[V(L)]^n$, а $\vec{q}_1 = (q_1^{(1)}, \ldots, q_n^{(1)})$ и $\vec{q}_2 = (q_1^{(2)}, \ldots, q_n^{(2)})$ — два упорядоченных n-набора из $Q_{\mathcal{A}}$. Пишем $(\vec{q}_1, \vec{x}_1) \models (\vec{q}_2, \vec{x}_2)$, если для любого $1 \le i \le n$ имеет место: $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}) \in E(L)$ или $x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$, $q_i^{(2)} = \varphi_i(q_i^{(1)}, a_i(\vec{q}_1, \vec{x}_1))$ и $\psi_i(q_i^{(1)}, a_i(\vec{q}_1, \vec{x}_1)) = |(x_i^{(1)}, x_i^{(2)})|$.

Пусть $L_{\vec{x}_0}$ — n-инициальный лабиринт и $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ — коллектив из n инициальных автоматов. *Поведением* коллектива $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ в лабиринте $L_{\vec{x}_0}$ называется последовательность

$$\pi(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = (\vec{q}_0, \vec{x}_0), \ldots, (\vec{q}_t, \vec{x}_t), \ldots$$

такая, что $\vec{q}_t = (q_1^{(t)}, \ldots, q_n^{(t)}) \in Q_{\mathcal{A}}$, $\vec{x}_t = (x_1^{(t)}, \ldots, x_n^{(t)}) \in [V(L)]^n$ и $(\vec{q}_t, \vec{x}_t) \models (\vec{q}_{t+1}, \vec{x}_{t+1})$ для любых $t \ge 0$. Последовательность $\tau(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = \vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots$ называется *траекторией* коллектива $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ в лабиринте $L_{\vec{x}_0}$. Пусть $\tau_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = \vec{x}_i$ и $\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = (\vec{q}_i, \vec{x}_i)$ для любого $i \ge 0$. Также, для любого $1 \le i \le n$, пусть $\mathrm{Int}_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = \{x_i^{(j)} \mid j \ge 0\}$ и

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}).$$

В последующем под поведением коллектива инициальных автоматов $\mathcal{A}$ в 1-инициальном лабиринте L_{x_0}, $x_0 \in V(L)$, мы подразумеваем поведение коллектива $\mathcal{A}$ в $|\mathcal{A}|$-инициальном лабиринте $L_{\vec{y}_0}$, где $\vec{y}_0$ является упорядоченным $|\mathcal{A}|$-набором $(x_0, x_0, \ldots, x_0)$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, где $\mathfrak{A}_i = (Q_i, \varphi_i, \psi_i)$ для любого $1 \le i \le n$, — коллектив (инициальных или неинициальных) автоматов.

Для произвольного $1 \le i \le n$, возьмем любое $q \in Q_i$, а также любые $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in A_{\mathfrak{A}_i}$ и $1 \le j \le n$, $j \ne i$. Пусть

$$\mathrm{inp}_{i \to j}(q, \vec{a}) = [(a_0, a_1, \ldots, a_n) \downarrow (q; i+1)] \downarrow (0; j+1).$$

Заметим, что $\mathrm{inp}_{i \to j}(q, \vec{a}) \in A_{\mathfrak{A}_j}$.

Множество автоматов $\mathcal{K} = \{\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_m}\}$, где $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n$ и $1 \le m < n$, называется *множеством камней* для $\mathcal{A}$, если:

1) $|Q_{i_j}| = 1$ для любого $1 \le j \le m$;

2) для любых $1 \le j \le m$ и $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in A_{\mathfrak{A}_{i_j}}$ удовлетворяющих условию $\psi_{i_j}(\hat{q}_j, \vec{a}) = \omega \ne \mathbf{0}$, где $\hat{q}_j$ единственное состояние автомата $\mathfrak{A}_{i_j}$, существует $k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_m\}$ такое, что $a_k \ne 0$ и $\psi_k(a_k, \mathrm{inp}_{i_j \to k}(\hat{q}_j, \vec{a})) = \omega$.

Элементы множества $\mathcal{K}$ называются *камнями*. Таким образом, если некоторый автомат коллектива $\mathcal{A}$ является камнем и если в какой-то момент он перемещается в некотором направлении из текущей вершины, то существует по крайней мере один автомат не являющийся камнем, который в тот же момент из той же вершины перемещается в том же направлении.

Пусть $(\{q\}, \varphi, \psi)$ — камень некоторого коллектива $\mathcal{A}$. В дальнейшем его единственное состояние q обозначим символом 1, а поскольку функция φ определяется "тривиальным" образом, то такой автомат-камень будем обозначать через (ψ). Также, для любого входа a этого камня значение $\psi(q, a)$, т.е., $\psi(1, a)$, обозначим короче через $\psi(a)$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ — коллектив автоматов и $\mathcal{K}$ — некоторое множество камней для $\mathcal{A}$. Упорядоченную пару $(\mathcal{A}, \mathcal{K})$ называем *коллективом автоматов с выделенным множеством камней*. Если $|\mathcal{K}| = m$, то пару $(\mathcal{A}, \mathcal{K})$ называем коллективом автоматов *типа* $(n - m, m)$; допускаем и случай, когда $m = 0$, и в таком случае считаем, что множество камней не выделено. Ясно, что без ограничения общности, можно предположить, что этими выделенными m камнями являются камни $\mathfrak{A}_{n-m+1}, \ldots, \mathfrak{A}_n$, так что в последующем коллектив автоматов с выделенным множеством камней $(\mathcal{A}, \mathcal{K})$ типа $(n - m, m)$ обозначим через

$$(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m} \,|\, \mathfrak{A}_{n-m+1}, \ldots, \mathfrak{A}_n),$$

где $\mathcal{K} = \{\mathfrak{A}_{n-m+1}, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$; часть в этом наборе до знака $|$ называется *активной частью* коллектива $\mathcal{A}$, а любой из первых $n - m$ автоматов называется *представителем* активной части.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r \,|\, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_s)$, где $\mathfrak{A}_i = (Q_i, \varphi_i, \psi_i)$ для любого $1 \le i \le r$ и $\mathfrak{K}_j = (\hat{\psi}_j)$ для любого $1 \le j \le s$, — коллектив (инициальных или неинициальных) автоматов типа (r, s). Пусть, также, $\mathcal{K}_0 = \{\mathfrak{K}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{K}_{j_k}\}$ некоторое подмножество множества $\mathcal{K} = \{\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_s\}$; $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le s$. Далее, пусть $\vec{x}_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{r+s}^{(1)})$ и $\vec{x}_2 = (x_1^{(2)}, \ldots, x_{r+s}^{(2)})$ — два упорядоченных $r{+}s$-набора из $[V(L)]^{r+s}$, а $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ — два упорядоченных $(r{+}s)$-набора из $Q_{\mathcal{A}}$. Пишем $(\vec{q}_1, \vec{x}_1) \sim_{\mathcal{K}_0} (\vec{q}_2, \vec{x}_2)$, если $\vec{q}_1 = \vec{q}_2$, и если k-выборки $x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_k}^{(1)}$ и $x_{j_1}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(2)}$ являются одинаковыми сочетаниями элементов из множества $V(L)$ и $x_j^{(1)} = x_j^{(2)}$ для любого $1 \le j \le r + s$ такого, что $j \ne j_t$ для всех $1 \le t \le k$.

Говорим, что $\mathcal{K}_0$ является множеством камней одного цвета для коллектива $\mathcal{A}$, если для любых $(\vec{q}_1, \vec{x}_1), (\vec{q}_2, \vec{x}_2) \in Q_{\mathcal{A}} \times [V(L)]^{r+s}$ из

$$(\vec{q}_1, \vec{x}_1) \sim_{\mathcal{K}_0} (\vec{q}_2, \vec{x}_2) \quad \text{следует, что} \quad (\vec{q}_1^{\,*}, \vec{x}_1^{\,*}) \sim_{\mathcal{K}_0} (\vec{q}_2^{\,*}, \vec{x}_2^{\,*}),$$

где $(\vec{q}_1, \vec{x}_1) \models (\vec{q}_1^{\,*}, \vec{x}_1^{\,*})$ и $(\vec{q}_2, \vec{x}_2) \models (\vec{q}_2^{\,*}, \vec{x}_2^{\,*})$.

Если в коллективе автоматов с выделенными камнями $(\mathcal{A}, \mathcal{K})$ множество $\mathcal{K}$ является множеством камней одного цвета, то такой коллектив называется коллективом автоматов с камнями одного цвета; в противном случае, он называется коллективом автоматов с камнями разного цвета. В последующем, если не сказано иначе, каждый коллектив автоматов с камнями будет коллективом с камнями одного цвета.

Некоторый n-инициальный лабиринт $L_{\vec{x}_0}$ называется *ловушкой* для коллектива из n инициальных автоматов $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$, если имеет место

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{x}_0}) \ne V(L).$$

В дальнейшем нам потребуются не любые ловушки для данного коллектива, но ловушки специального типа.

Правильный мозаичный n-инициальный лабиринт $(L; \vec{x}_0, x_1)$ называется *правильной ловушкой* для данного коллектива из n инициальных автоматов $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$, если $x_1 \notin \mathrm{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, (L; \vec{x}_0, x_1))$.

В последующем введем некоторые частично определенные бинарные операции на лабиринтах, которые будут удовлетворять следующему условию: если $*$ — одна из тех операций, а L_1 и L_2 — некоторые лабиринты, тогда лабиринт [орграф с разметкой дуг] $L * L'$, если он определен, принадлежит одному и тому же классу изоморфных лабиринтов [орграфов с разметкой дуг] $[L_1 * L_2]$ для любых $L \in [L_1]$ и $L' \in [L_2]$. На самом деле, мы смотрим на эти операции как на операции, которые определены на множестве классов изоморфных лабиринтов, и когда мы говорим, что 'дан лабиринт [орграф с разметкой дуг] $L_1 * L_2$' мы на самом деле считаем, что дан некоторый лабиринт [орграф с разметкой дуг] класса $[L_1 * L_2]$, и, следовательно, результат применения операции $*$ может существовать даже в том случае, когда $L_1 * L_2$ не существует.

Если при применении некоторой операции над лабиринтами не появляются новые дуги и мы не меняем метки оставшихся дуг, мы, из-за краткости, не описываем разметку дуг лабиринта [орграфа с разметкой дуг], который получен в результате применения этой операции, считая, что отметки дуг остались прежними.

Пусть $L_1 = (V_1, E_1)$ и $L_2 = (V_2, E_2)$ — произвольная пара лабиринтов такая, что $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Через $L_1 \dot\cup L_2$ обозначим (*дизъюнктное*) *объединение* лабиринтов L_1 и L_2, т.е., $L_1 \dot\cup L_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Пусть L — лабиринт, и пусть x и y, $x \neq y$, — две его вершины (необязательно смежные). Через $L - \langle x, y\rangle$ обозначим орграф с разметкой дуг $(V(L), E(L)\backslash\{(x,y),(y,x)\})$.

Пусть x и y, $x \neq y$, — несмежные вершины лабиринта L, которые удовлетворяют условиям, что $[x]\cap[y] = \emptyset$ и $x\omega_1 \neq y\omega_2$ для любых $\omega_1 \in [x]$ и $\omega_2 \in [y]$. Через $\mathrm{vi}(L, x, y)$ обозначим лабиринт

$$(V\backslash\{y\}, [E\backslash((\{y\}\times V) \cup (V \times \{y\}))] \cup \overleftarrow{E}(x,y) \cup \overrightarrow{E}(x,y)),$$

где

$$\overleftarrow{E}(x,y) = \{(y\omega, x)\,|\,\omega \in [y]\}, \quad \overrightarrow{E}(x,y) = \{(x, y\omega)\,|\,\omega \in [y]\},$$

и $|(x, y\omega)| = \omega$ и $|(y\omega, x)| = \overline{\omega}$ для любого $\omega \in [y]$ (метки остальных дуг не меняем).

Пусть $(L_1; x_1', x_1'')$ и $(L_2; x_2', x_2'')$ — лабиринты такие, что

$$V(L_1) \cap V(L_2) = \emptyset \quad \text{и} \quad [x_1'']_{L_1} \cap [x_2']_{L_2} = \emptyset.$$

Обозначим лабиринт $(\mathrm{vi}(L_1 \dot\cup L_2, x_1'', x_2'); x_1', x_2'')$ через L_1L_2. Для данных лабиринтов $(L_i; x_i', x_i'')$, $1 \leq i \leq n$, через $L_1 \ldots L_n$ обозначим лабиринт $(\ldots((L_1L_2)L_3)\ldots L_{n-1})L_n$. Обозначим вход x_1' [выход x_n''] этого лабиринта через $(L_1\ldots L_n; 0)$ [$(L_1 \ldots L_n; n)$], и для любого $1 \leq i \leq n-1$, через $(L_1\ldots L_n; i)$ обозначим, теперь в $L_1 \ldots L_n$, вершину x_i''. Если $L_1 \cong \ldots \cong L_n \cong L$, то пишем L^n вместо $L_1 \ldots L_n$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, (x, y) — его некоторая дуга и z — произвольная внутреняя точка отрезка $\overline{xy}$. Тогда через $L \oplus z$ обозначим прямоугольный лабиринт такой, что $V(L \oplus z) = V(L - {<}x,y{>}) \cup \{z\}$, $E(L \oplus z) = E(L - {<}x,y{>}) \cup \{(x,z),(z,y),(y,z),(z,x)\}$, $|(x,z)|_{L\oplus z} = |(z,y)|_{L\oplus z} = |(x,y)|_L$ и $|(y,z)|_{L\oplus z} = |(z,x)|_{L\oplus z} = |(y,x)|_L$ (также, как и выше, предполагаем, что $|e|_{L\oplus z} = |e|_L$) для всех $e \in E(L - {<}x,y{>})$).

Имеет место следующее фундаментальное утверждение в теории автоматов в лабиринтах.

Теорема 1. *Для любого коллектива типа* $(1,1)$ *существует правильная ловушка.*

Сначала в [4] (см. также [5]) доказано, что для любого коллектива типа $(1,0)$ существует правильная ловушка, а потом в [6] (см. также [7]) доказано, что то же самое имеет место для коллектива типа $(1,1)$.

Коллектив инициальных автоматов $\mathcal{A}_{\bar{q}_0}$ называется *универсальным обходчиком* для множества лабиринтов $\mathfrak{L}$, если $\mathrm{Int}(\mathcal{A}_{\bar{q}_0}, L_x) = V(L)$ для любых $L \in \mathfrak{L}$ и $x \in V(L)$.

Пусть σ_+ и σ_- — циклические перестановки $(\mathbf{e\,n\,w\,s})$ и $(\mathbf{e\,s\,w\,n})$ множества $\mathfrak{D}$ соответственно. Для любых $\omega \in \mathfrak{D}$ и $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$, пусть $\omega^+(a)$ — первый элемент в последовательности $\sigma_+(\omega), \sigma_+^2(\omega), \sigma_+^3(\omega), \sigma_+^4(\omega)$ принадлежащий множеству a. Подобным образом, определим $\omega^-(a)$ для всех $\omega \in \mathfrak{D}$ и $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$.

Заметим, что любой коллектив типа $(1,0)$ можно рассматривать как (допустимый) автомат и, наоборот, любой автомат можно рассматривать как коллектив типа $(1,0)$. Имеет место следующее утверждение (например, см. [8]).

Теорема 2. *Существует универсальный обходчик типа* $(1,0)$ *для класса всех конечных лабиринтов, являющихся деревьями.*

Доказательство. Определим допустимые автоматы $\mathfrak{A}^- = (Q, \varphi^-, \psi^-)$ и $\mathfrak{A}^+ = (Q, \varphi^+, \psi^+)$, где $Q = \{q_\mathbf{e}, q_\mathbf{n}, q_\mathbf{w}, q_\mathbf{s}\}$, следующим образом. Для любых $\omega \in \mathfrak{D}$ и $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$, пусть $\varphi^-(q_\omega, a) = q_{\bar{\omega}^-(a)}$, $\psi^-(q_\omega, a) = \bar{\omega}^-(a)$, $\varphi^+(q_\omega, a) = q_{\bar{\omega}^+(a)}$, и $\psi^+(q_\omega, a) = \bar{\omega}^+(a)$; также пусть

$$\varphi^-(q_\omega, \emptyset) = \varphi^+(q_\omega, \emptyset) = q_\omega \quad \text{и} \quad \psi^-(q_\omega, \emptyset) = \psi^+(q_\omega, \emptyset) = \mathbf{0}$$

для любого $\omega \in \mathfrak{D}$. Нетрудно увидеть, что для любого $q \in Q$, автоматы $\mathfrak{A}_q^-$ и $\mathfrak{A}_q^+$ являются универсальными обходчиками для класса всех конечных лабиринтов, являющихся деревьями. □

Пусть $\mathfrak{A} = (Q, \varphi, \psi)$ — допустимый автомат. Для любого $n \geq 2$ определим коллектив автоматов $\mathcal{A}(\mathfrak{A}; n) = (\mathfrak{A}^* \,|\, \mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_{n-1})$ типа $(1, n-1)$ следующим образом. Пусть $\mathfrak{A}^* = (Q, \varphi^*, \psi^*)$ и $\mathfrak{K}_i = (\psi_i)$ для любого $1 \leq i \leq n-1$. Для любых $q \in Q$, $a \in \mathcal{P}(\mathfrak{D})$ и $1 \leq i \leq n$, через $\alpha_i(q, a)$ обозначим $(n+1)$-набор $(a, q, 1, \dots, 1) \downarrow (0; i+1)$. Тогда, для любых $q \in Q$ и $a \in \mathcal{P}(\mathfrak{D})$ положим, что $\varphi^*(q, \alpha_1(q, a)) = \varphi(q, a)$ и $\psi^*(q, \alpha_1(q, a)) = \psi(q, a)$, и что $\psi_i(\alpha_{i+1}(q, a)) = \psi(q, a)$ для любого $1 \leq i \leq n-1$; функции φ^* и ψ^*, а также ψ_i для любого $1 \leq i \leq n-1$, тривиально определены во всех остальных точках. В дальнейшем, для любого $q \in Q$, через $\bar{q}$ обозначим состояние $(q, 1, \dots, 1)$ коллектива $\mathcal{A}(\mathfrak{A}; n)$. Нетрудно увидеть, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если* $\mathfrak{A}_{q_0}$ *— некоторый универсальный обходчик для класса лабиринтов* $\mathfrak{L}$*, то для любого* $n \geq 2$*, коллектив* $[\mathcal{A}(\mathfrak{A}; n)]_{\bar{q}_0}$ *также является универсальным обходчиком для* $\mathfrak{L}$.

Фиксируем целые числа $r \geq 1$ и $s \geq 0$. Пусть

$$\mathcal{A}_k = (\mathfrak{A}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{A}_r^{(k)} \,|\, \mathfrak{K}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{K}_s^{(k)}), \quad 1 \leq k \leq n,$$

— некоторые коллективы типа (r, s), где $\mathfrak{A}_i^{(k)} = (Q_i^{(k)}, \varphi_i^{(k)}, \psi_i^{(k)})$ для любых $1 \leq i \leq r$ и $1 \leq k \leq n$, и $\mathfrak{K}_j^{(k)} = (\hat{\psi}_j^{(k)})$ для любых $1 \leq j \leq s$ и $1 \leq k \leq n$. Не теряя общности, предположим, что $Q_i^{(k_1)} \cap Q_i^{(k_2)} = \emptyset$ для любых $1 \leq i \leq r$ и $1 \leq k_1 < k_2 \leq n$ (заметим, что даже когда это условие не выполнено, мы всегда можем взять подходящие коллективы, изоморфные данным, и таким способом обеспечить его выполнение).

Мультиорграф (без петель) G порядка n называется *комбинирующей диаграммой* для данных коллективов автоматов, если:

1) его вершины помечены символами $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq n$, таким образом, что метки любых двух различных вершин различные;

2) его дуги помечены упорядоченными 3-наборами $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, A)$ таким образом, что если метка начальной вершины некоторой дуги $\mathcal{A}_i$, а метка ее конечной вершины $\mathcal{A}_j$, тогда $\vec{q}_1 \in Q_{\mathcal{A}_i}$, $\vec{q}_2 \in Q_{\mathcal{A}_j}$ и $A \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{D})$;

3) $(\vec{q}_1^{\,\prime}, \vec{q}_2^{\,\prime}, A')$ и $(\vec{q}_1^{\,\prime\prime}, \vec{q}_2^{\,\prime\prime}, A'')$ — метки дуг, имеющих в качестве начальной одну и ту же самую вершину, то $\vec{q}_1^{\,\prime} \neq \vec{q}_1^{\,\prime\prime}$.

Пусть $\mathbb{D}$ — некоторая комбинирующая диаграмма для коллективов $\mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq n$, имеющая m дуг, и пусть $(\kappa_1^1, \kappa_2^1, A_1), \ldots, (\kappa_1^m, \kappa_2^m, A_m)$ — метки этих дуг. Определим $\mathbb{D}$-*композицию* данных коллективов

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i / \mathbb{D} = (\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r \,|\, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_s),$$

где $\mathfrak{A}_i = (Q_i, \varphi_i, \psi_i)$ для любого $1 \leq i \leq r$ и $\mathfrak{K}_j = (\hat{\psi}_j)$ для любого $1 \leq j \leq s$, следующим образом. Пусть $t = r + s + 1$ и $Q_i = \cup_{j=1}^{n} Q_i^{(j)}$ для любого $1 \leq i \leq r$, и пусть

$$\varphi_i(q, \vec{a}) = \begin{cases} \mathrm{pr}_i(\kappa_2^j), & \text{если } \vec{a}|_2^t \!\downarrow\! (q; i) = \kappa_1^j \text{ и } \mathrm{pr}_1(\vec{a}) \in A_j \text{ для} \\ & \quad \text{некоторого } 1 \leq j \leq m; \\ \varphi_i^{(j)}(q, \vec{a}), & \text{если не имеет место предыдущее условие и} \\ & \quad \vec{a}|_2^t \!\downarrow\! (q; i) \in \hat{Q}_{\mathcal{A}_j} \text{ для некоторого } j \in \overline{1, n}; \\ q & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\psi_i(q, \vec{a}) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \vec{a}|_2^t \!\downarrow\! (q; i) = \kappa_1^j \text{ and } \mathrm{pr}_1(\vec{a}) \in A_j \text{ для} \\ & \quad \text{некоторого } 1 \leq j \leq m; \\ \psi_i^{(j)}(q, \vec{a}), & \text{если не имеет место предыдущее условие и} \\ & \quad \vec{a}|_2^t \!\downarrow\! (q; i) \in \hat{Q}_{\mathcal{A}_j} \text{ для некоторого } j \in \overline{1, n}; \\ \mathbf{0} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для любых $q \in Q_i$, $\vec{a} \in A_{\mathfrak{A}_i}$ и $1 \le i \le r$. Также пусть

$$\hat{\psi}_i(\vec{a}) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } \vec{a}|_2^t \!\downarrow\! (1; r+i) = \kappa_1^j \text{ and } \mathrm{pr}_1(\vec{a}) \in A_j \text{ для} \\ & \quad \text{некоторого } 1 \le j \le m; \\ \hat{\psi}_i^{(j)}(\vec{a}), & \text{если не имеет место предыдущее условие и} \\ & \quad \vec{a}|_2^t \!\downarrow\! (1; r+i) \in \hat{Q}_{\mathcal{A}_j} \text{ для некоторого } j \in \overline{1,n}; \\ \mathbf{0} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для любых $\vec{a} \in A_{\mathfrak{K}_i}$ и $1 \le i \le s$.

В последующем, когда приводим некоторую комбинирующую диаграмму, мы часто оставляем дуги, определяющие переходы из одного "режима работы" коллектива в другой, без отметок, а только их нумеруем, объясняя в сопутствующем тексте смысл соответствующих переходов. Также, если в некоторой комбинирующей диаграмме отметка дуги, связывающей вершину с отметкой $\mathcal{A}_i$ с вершиной с отметкой $\mathcal{A}_j$, имеет вид $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, A)$, то в последующем, когда пишем такую отметку, A будем опускать, если $A = \mathcal{P}(\mathfrak{D})$, а $\vec{q}_2$ будем опускать, если $\vec{q}_2$ является начальным состоянием коллектива $\mathcal{A}_j$. Таким образом, в частных случаях эта отметка может приобрести вид $(\vec{q}_1, \vec{q}_2)$, $(\vec{q}_1, A)$, или даже $(\vec{q}_1)$.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q, \varphi, \psi)$ — автомат и $W \subseteq Q$. Определим *простое* W*-расширение* автомата $\mathfrak{A}$, в обозначении $\mathfrak{A}\!\uparrow\! W$, следующим образом. Пусть W° — множество удовлетворяющее условиям $|W^\circ| = |W|$ и $W^\circ \cap Q = \emptyset$, и пусть $f\colon W \to W^\circ$ — некоторая биекция. Через q° обозначим $f(q)$ для любого $q \in W$. Теперь определим $\mathfrak{A}\!\uparrow\! W = (Q \cup W^\circ, \varphi^\circ, \psi^\circ)$ так, что $\varphi^\circ(q,a) = \varphi(q,a)$ и $\psi^\circ(q,a) = \psi(q,a)$ для любого $(q,a) \in Q \times A_{\mathfrak{A}}$, и $\varphi^\circ(q^\circ,a) = \varphi(q,a)$ и $\psi^\circ(q^\circ,a) = \psi(q,a)$ для любого $(q,a) \in W \times A_{\mathfrak{A}}$.

Пусть L — некоторый прямоугольный лабиринт. Любая компонента связности множества $\mathbf{R}^2 \backslash \overline{L}$ называется *гранью* лабиринта L. Если L конечен (а мы всегда предполагаем, что это так, если не оговорено иное), то он имеет только одну *неограниченную грань* (которая называется также и его *внешней гранью*) и $k \ge 0$ *ограниченных* (или *внутренних*) *граней*. Через $f_\infty(L)$ обозначим внешнюю грань лабиринта L. Пусть f — некоторая грань (ограниченная или неограниченная) лабиринта L. Множество $b(f) = \overline{f} \cap V(L)$ назовем *вершинной границей* грани f (здесь $\overline{f}$ — замыкание множества f относительно стандартной топологии в $\mathbf{R}^2$).

Введем на $\mathbf{R}^2$ отношение порядка $\le$ следующим образом:

$$(x_1, y_1) \le (x_2, y_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} y_1 < y_2 \vee (y_1 = y_2 \wedge x_1 \le x_2)$$

для любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$. Поскольку для любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$ имеет место $(x_1, y_1) \le (x_2, y_2)$ или $(x_2, y_2) \le (x_1, y_1)$, то существует $\max b(f)$ для любой грани f конечного прямоугольного лабиринта L; для данной грани f вершина $\max b(f)$ называется его *сингулярной вершиной*.

Пусть $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ — коллектив инициальных авитоматов, $\vec{q}_1 \neq \vec{q}_0$ и $\vec{q}_2 \neq \vec{q}_0$ — два различных состояния коллектива $\mathcal{A}$, L_{x_0} — некоторый лабиринт и $\mathfrak{p}$ — некоторое лабиринтное свойство (свойство, которым в общем случае может обладать некоторый лабиринт). Через $(x_0; n)$ обозначим упорядоченный n-набор, у которого все координаты равны x_0. Говорим, что $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ *сильно распознает* свойство $\mathfrak{p}$ в L_{x_0}, если существует $t \geq 1$ такое, что $\mathrm{pr}_1(\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{x_0})) \neq \vec{q}_j$ для любых $0 \leq i \leq t-1$ и $1 \leq j \leq 2$, и такое, что:

или $\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{x_0}) = (\vec{q}_1, (x_0, |\mathcal{A}|))$ для любого $i \geq t$, если L_{x_0} обладает свойством $\mathfrak{p}$,

или $\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{x_0}) = (\vec{q}_2, (x_0, |\mathcal{A}|))$ для любого $i \geq t$, если L_{x_0} не обладает свойством $\mathfrak{p}$.

Обозначим состояния $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ через $\vec{q}_\top(\mathcal{A}_{\vec{q}_0})$ и $\vec{q}_\perp(\mathcal{A}_{\vec{q}_0})$ соответственно.

Пусть L — конечный прямоугольный лабиринт. Вершина $v \in V(L)$ является *квазисингулярной вершиной* грани $f_\infty(L)$, если $v \in b(f_\infty(L))$ и если или $[v] = \{\mathbf{w}, \mathbf{s}\}$ и $f_\infty(L)$ лежит слева от маршрута $\overline{\mathbf{e}v\mathbf{s}}$, или $[v] \in \{\{\mathbf{w}\}, \{\mathbf{s}\}\}$. Вершина $v \in V(L)$ является *квазисингулярной вершиной* ограниченной грани f лабиринта L, если $v \in b(f)$, $\{\mathbf{w}, \mathbf{s}\} \subseteq [v]$ и f лежит справо от маршрута $\overline{\mathbf{e}v\mathbf{s}}$. Имеют место следующие четыре утверждения (см., например, [8] и [9]).

Теорема 4. *Существует коллектив инициальных автоматов $\mathcal{B}_2$ типа $(1,2)$, который в любом мозаичном лабиринте L_{x_0} сильно распознает свойство, является ли вершина x_0 квазисингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$.*

Теорема 5. *Существует коллектив инициальных автоматов $\mathcal{B}_4$ типа $(1,2)$, который в любом мозаичном лабиринте L_{x_0} сильно распознает свойство, является ли вершина x_0 квазисингулярной вершиной некоторой ограниченной грани f лабиринта L.*

Теорема 6. *Существует коллектив инициальных автоматов $\mathcal{B}_3$ типа $(1,2)$, который в любом мозаичном лабиринте L_{x_0}, где x_0 — квазисингулярная вершина грани $f_\infty(L)$, сильно распознает свойство, является ли x_0 сингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$.*

Теорема 7. *Существует коллектив инициальных автоматов $\mathcal{B}_5$ типа $(1,2)$, который в любом мозаичном лабиринте L_{x_0}, где x_0 — квазисингулярная вершина ограниченной грани f лабиринта L, сильно распознает свойство, является ли x_0 сингулярной вершиной грани f.*

3. Проблема типовой встречи для автоматов

Пусть $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ — коллектив инициальных автоматов и L_{x_0} — некоторый лабиринт. Также пусть W — фиксированное множество состояний коллектива

$\mathcal{A}$; назовем элементы множества W *финишными состояниями.* Предположим, что дано некоторое свойство $\mathfrak{p}$, которым могут обладать некоторые вершины лабиринта L; назовем такие вершины $\mathfrak{p}$-*вершинами* и через $V_{\mathfrak{p}}(L)$ обозначим множество всех $\mathfrak{p}$-вершин лабиринта L. Говорим, что $\mathcal{A}_{\vec{q}_0}$ *сильно находит* $\mathfrak{p}$-вершины в L_{x_0}, если:

или существуют момент $t \geq 0$, состояние $\vec{q} \in W$, и вершина $x \in V_{\mathfrak{p}}(L)$ такие, что $\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{x_0}) = (\vec{q}, (x; |\mathcal{A}|))$ для любого $i \geq t$,

или $V_{\mathfrak{p}}(L) = \emptyset$ и $\mathrm{pr}_1(\pi_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{x_0})) \notin W$ для любого $i \geq 0$.

Имеет место следующая теорема (см., например, [8] и [9]).

Теорема 8. *Существует коллектив инициальных автоматов $\mathcal{A}$ типа $(1, 2)$, который в любом конечном мозаичном лабиринте L_{x_0} сильно находит сингулярную вершину грани $f_\infty(L)$.*

Доказательство. Рассмотрим комбинирующую диаграмму $\mathbb{D}$, данную на рис. 2 (но без дуг с метками 4° и 13°, и без их соответствующих конечных вершин), где $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}\,(\mathfrak{A}^+ \!\uparrow\! \{q_{\mathbf{e}}, q_{\mathbf{n}}\}; 3)$, коллективы $\mathcal{B}_i$, $2 \leq i \leq 5$, являются коллективами, определенными в последних четырех теоремах, и $\mathcal{B}'_i$ — коллектив изоморфный $\mathcal{B}_i$ для любого $2 \leq i \leq 5$. Также, введем множества $A^{(1)}_{\mathbf{e}} = \{\{\mathbf{w}\}\} \cup A^{(2)}$ и $A^{(1)}_{\mathbf{n}} = \{\{\mathbf{s}\}\} \cup A^{(2)}$, где $A^{(2)} = \{a \in \mathcal{P}(\mathfrak{D}) \,|\, \{\mathbf{w}, \mathbf{s}\} \subseteq a\}$. Значения меток диаграммы определим ниже.

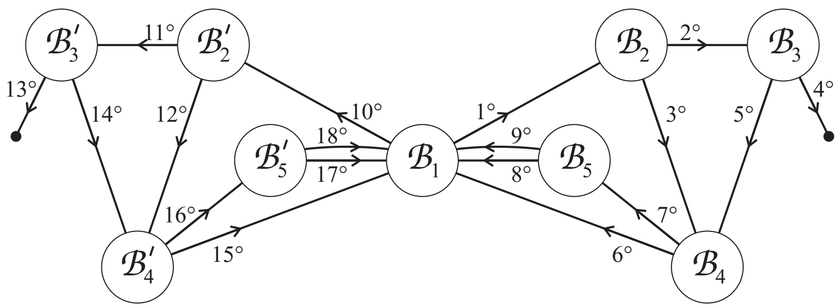


Рис. 2.

Теперь определим $\mathcal{A}$ как $\mathbb{D}$-композицию данных коллективов автоматов. Пусть в начальный момент все автоматы коллектива $\mathcal{A}$ находятся в некоторой вершине x конечного мозаичного лабиринта L, и коллектив $\mathcal{A}$ находится в некотором состоянии $\vec{q} \in Q_{\mathcal{B}_1}$. В целом коллектив $\mathcal{A}$ будет "вести себя" как автомат $\mathfrak{A}^+$, но при этом он "работает" по следующей "программе":

1: Если $\vec{q} = \bar{q}_{\mathbf{e}}$ и $[x] \in A^{(1)}_{\mathbf{e}}$, то $\mathcal{A}$ переходит к шагу 2 (переход $1^\circ\colon (\bar{q}_{\mathbf{e}}, A^{(1)}_{\mathbf{e}})$); если $\vec{q} = \bar{q}_{\mathbf{n}}$ и $[x] \in A^{(1)}_{\mathbf{n}}$, то $\mathcal{A}$ переходит к шагу 6 (переход $10^\circ\colon (\bar{q}_{\mathbf{n}}, A^{(1)}_{\mathbf{n}})$); в противном случае, используя "программу" для $\mathcal{B}_1$, коллектив $\mathcal{A}$ переходит в состояние $\vec{q}'$, и все автоматы коллектива $\mathcal{A}$ переходят в вершину x'. Пусть $x := x'$ и $\vec{q} := \vec{q}'$, и пусть коллектив $\mathcal{A}$ переходит снова к шагу 1.

2: Используя "программу" для $\mathcal{B}_2$, коллектив $\mathcal{A}$ проверяет, является ли вершина x квазисингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$. Если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}_2)$, то он переходит к шагу 3 (переход $2°\colon(\vec{q}_\top(\mathcal{B}_2))$), а если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_2)$, то он переходит к шагу 4 (переход $3°\colon(\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_2))$).

3: Используя "программу" для $\mathcal{B}_3$, коллектив $\mathcal{A}$ проверяет, является ли вершина x сингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$. Если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}_3)$, то он оказался в своем финишном состоянии (переход $4°$), а если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_3)$), то он переходит к шагу 4 (переход $5°\colon(\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_3))$).

4: Используя "программу" для $\mathcal{B}_4$, коллектив $\mathcal{A}$ проверяет, является ли вершина x квазисингулярной вершиной некоторой ограниченной грани f лабиринта L. Если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}_4)$, то он переходит к шагу 5 (переход $7°\colon(\vec{q}_\top(\mathcal{B}_4))$, а если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_4)$), то пусть $\vec{q} := \bar{q}^\circ_{\mathbf{e}}$, и пусть $\mathcal{A}$ переходит к шагу 1 (переход $6°\colon(\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_4), \bar{q}^\circ_{\mathbf{e}})$).

5: Используя "программу" для $\mathcal{B}_5$, коллектив $\mathcal{A}$ проверяет, является ли вершина x сингулярной вершиной ограниченной грани f. Если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}_5)$, то пусть $\vec{q} := \bar{q}^\circ_{\mathbf{n}}$, и пусть $\mathcal{A}$ переходит к шагу 1 (переход $9°\colon(\vec{q}_\top(\mathcal{B}_5), \bar{q}^\circ_{\mathbf{n}})$), а если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_5)$), то пусть $\vec{q} := \bar{q}^\circ_{\mathbf{e}}$, и пусть $\mathcal{A}$ переходит к шагу 1 (переход $8°\colon(\vec{q}_\perp(\mathcal{B}_5), \bar{q}^\circ_{\mathbf{e}})$).

6: Используя "программу" для $\mathcal{B}'_2$, коллектив $\mathcal{A}$ проверяет, является ли вершина x квазисингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$. Если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_2)$, то он переходит к шагу 7 (переход $11°\colon(\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_2))$), а если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_2)$, то он переходит к шагу 8 (переход $12°\colon(\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_2))$).

7: Используя "программу" для $\mathcal{B}'_3$, коллектив $\mathcal{A}$ проверяет, является ли вершина x сингулярной вершиной грани $f_\infty(L)$. Если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_3)$, то он оказался в своем финишном состояние (переход $13°$), а если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_3)$, то он переходит к шагу 8 (переход $14°\colon(\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_3))$).

8: Используя "программу" для $\mathcal{B}'_4$, коллектив $\mathcal{A}$ проверяет, является ли вершина x квазисингулярной вершиной некоторой ограниченной грани f лабиринта L. Если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_4)$, то он переходит к шагу 9 (переход $16°\colon(\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_4))$), а если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_4)$, то пусть $\vec{q} := \bar{q}^\circ_{\mathbf{n}}$, и пусть $\mathcal{A}$ переходит к шагу 1 (переход $15°\colon(\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_4), \bar{q}^\circ_{\mathbf{n}})$).

9: Используя "программу" для $\mathcal{B}'_5$, коллектив $\mathcal{A}$ проверяет, является ли вершина x сингулярной вершиной ограниченной грани f. Если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_5)$, то пусть $\vec{q} := \bar{q}^\circ_{\mathbf{e}}$, и пусть $\mathcal{A}$ переходит к шагу

1 (переход 17°: $(\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_5), \bar{q}^\circ_{\mathbf{n}})$), а если $\mathcal{A}$ окажется в состоянии $\vec{q}_\perp(\mathcal{B}'_5)$, то пусть $\vec{q} := \bar{q}^\circ_{\mathbf{n}}$, и пусть $\mathcal{A}$ переходит к шагу 1 (переход 18°: $(\vec{q}_\top(\mathcal{B}'_5), \bar{q}^\circ_{\mathbf{e}})$).

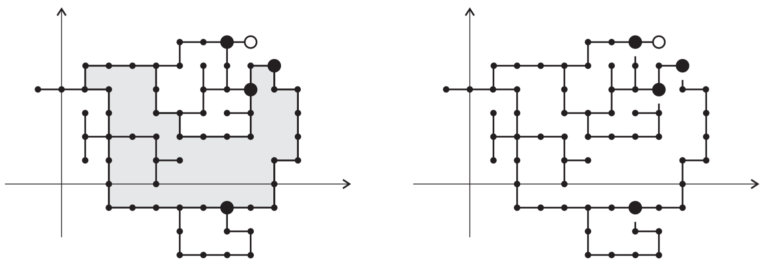


Рис. 3.

Покажем, что таким образом определенный коллектив автоматов $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию данной теоремы. Благодаря шагам 1, 4, 5, 8 и 9, и поскольку “глобально” коллектив $\mathcal{A}$ ведет себя как коллектив $\mathcal{A}_1$, то лабиринт, который он “видит”, является деревом: любой простой цикл графа $G(L)$ содержит как сингулярную вершину $x(f)$, так и вершины $x(f)\mathbf{e}$ и $x(f)\mathbf{s}$ хотя бы одной внутренней грани f лабиринта L, и этот цикл “срезается” вышеданной программой хотя бы по ребру $\langle x(f), x(f)\mathbf{s}\rangle$. Например, слева на рис. 3 дан мозаичный лабиринт, в котором с помощью символа $\bullet$ обозначены сингулярные вершины его ограниченных граней, а с помощью символа $\circ$ обозначена сингулярная вершина его внешней грани; справа на рис. 3 дано дерево, полученное соответствующей трансформацией из данного лабиринта. Из утверждения 3 следует, что $\mathcal{A}$ обходит L и таким образом обязательно посещает сингулярную вершину внешней грани $f_\infty(L)$, а благодаря шагам 1, 3 и 7 переходит в финишное состояние. $\square$

Заменяя в последних пяти теоремах тип коллектива $(1, 2)$ на тип $(2, 0)$, получаются опять точные утверждения. Также, с помощью небольшой модификации “программы” для коллектива $\mathcal{A}$, из предыдущей теоремы получаем следующее утверждение (впервые доказанное в [9], смотри также [8]).

Теорема 9. *Существуют универсальные обходчики типов* $(1, 2)$ *и* $(2, 0)$ *для класса всех конечных мозаичных лабиринтов.*

Пусть L — некоторый лабиринт, и пусть x_0 и y_0, $x_0 \neq y_0$, — две различные вершины лабиринта L. Предположим, что $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — два коллектива инициальных автоматов. Пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ имеет (x_0, y_0)-*встречу* в L, если существует $t > 0$, такое что $\mathrm{pr}_i(\tau_t(\mathcal{A}_1, L_{x_0})) = \mathrm{pr}_j(\tau_t(\mathcal{A}_2, L_{y_0}))$ для некоторых $1 \leq i \leq |\mathcal{A}_1|$ и $1 \leq j \leq |\mathcal{A}_2|$. Другими словами, пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

имеет (x_0, y_0)-встречу в L, если существуют автомат коллектива $\mathcal{A}_1$ и автомат коллектива $\mathcal{A}_2$, которые оказываются в некотором моменте $t > 0$, после того как в начальный момент все автоматы коллектива $\mathcal{A}_1$ положены в x_0 и все автоматы коллектива $\mathcal{A}_2$ положены в y_0, в одной и той же вершине лабиринта L.

Кроме приведенного варианта встречи для двух коллективов автоматов возможны и другие варианты. В случае, когда оба коллектива имеют выделенные активные части, описанный выше вариант встречи происходит, если существует представитель активной части одного коллектива, который встречается с хотя бы одним из автоматов (в том числе и с камнем) другого коллектива. Также возможен вариант, когда встреча коллективов осуществляется только при условии, если встретились представители активных частей данных коллективов. Возможны и такие варианты, когда один или оба коллектива не распознают правильно некоторые элементы другого коллектива: они или их не видят, или их не отличают от автоматов своего коллектива. Как и выше, встреча в таких случаях осуществляется, если в какой-то вершине имеет место событие, которое “не предусматривается” хотя бы одной из “программ” для данных коллективов.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс лабиринтов. Для любых двух типов коллективов $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}_0$ *проблема типовой встречи* в классе $\mathfrak{L}$ состоит в определении того, существуют ли коллективы $\mathcal{A}_1$ типа (i_1, j_1) и $\mathcal{A}_2$ типа (i_2, j_2) такие, что для любого $L \in \mathfrak{L}$ и любых $x_0, y_0 \in V(L)$, $x_0 \neq y_0$, пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ имеет (x_0, y_0)-встречу в L. Определим соответствующий предикат $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$ на множестве $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}_0)^2$ следующим образом: $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(i_1, j_1, i_2, j_2) = 1$, если такие коллективы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ существуют, и $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}(i_1, j_1, i_2, j_2) = 0$, если такие коллективы не существуют.

Подобным образом, для любого класса лабиринтов $\mathfrak{L}$ и любого типа коллективов $(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}_0$ *проблема типовой встречи* в классе $\mathfrak{L}$ состоит в определении того, существуют ли коллективы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ типа (i, j) такие, что для любого $L \in \mathfrak{L}$ и любых $x_0, y_0 \in V(L)$, $x_0 \neq y_0$, пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ имеет (x_0, y_0)-встречу в L. Определим соответствующий предикат $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ на множестве $\mathbf{N} \times \mathbf{N}_0$ следующим образом: $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}(i, j) = 1$, если такие коллективы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ существуют, и $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}(i, j) = 0$, если такие коллективы не существуют.

Также, для любого класса лабиринтов $\mathfrak{L}$ и любого типа коллективов $(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}_0$ *проблема сильной типовой встречи* в классе $\mathfrak{L}$ состоит в определении того, существуют ли коллективы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ типа (i, j) такие, что они являются двумя копиями одного и того же коллектива и для любого $L \in \mathfrak{L}$ и любых $x_0, y_0 \in V(L)$, $x_0 \neq y_0$, пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ имеет (x_0, y_0)-встречу в L. Определим соответствующий предикат $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$ на множестве

$\mathbf{N} \times \mathbf{N}_0$ следующим образом: $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}(i,j) = 1$, если такие коллективы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ существуют, и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}(i,j) = 0$, если такие коллективы не существуют.

Как уже сказано, впервые проблема встречи коллективов автоматов в изложенном здесь виде была представлена в работе [1], но некоторые частные результаты по этой проблеме имелись и раньше. Например, если $\mathcal{L} = \{Z^2\}$, где Z^2 — бесконечный шахматный лабиринт, имеющий в качестве своих вершин множество всех целочисленных точек плоскости, тогда $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}(1,2) = 1$ ([10]).

Пусть $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_m$, где $Z_i \subseteq \mathbf{N}_0$ для любого $1 \leq i \leq m$. Определим частичный порядок $\leq$ на Z следующим образом: для любых упорядоченных m-наборов $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ и $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ множества Z имеет место $\vec{z} \leq \vec{w}$, если $z_i \leq w_i$ для любого $1 \leq i \leq m$. Предикаты $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$ монотонны по отношению к введенному частичному порядку на соответствующих им доменам. Следовательно, предикаты $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$ могут быть описаны с помощью множеств их нижних единиц. В дальнейшем для монотонного предиката $\mathbf{M}$ соответствующее множество его нижних единиц обозначим через $\mathbf{U}(\mathbf{M})$.

Через $\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}$ обозначим класс всех конечных мозаичных лабиринтов, через $\mathfrak{L}_{\mathrm{m}}$ — класс всех мозаичных лабиринтов, через $\mathfrak{L}_{\mathrm{fr}}$ — класс всех конечных прямоугольных лабиринтов и через $\mathfrak{L}_{\mathrm{r}}$ — класс всех прямоугольных лабиринтов. Имеет место следующая теорема.

Теорема 10. *$\mathbf{U}(\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}) = \{(1,2,1,0),(2,0,1,0),(1,0,1,2),(1,0,2,0)\}$ и $\mathbf{U}(\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}) = \mathbf{U}(\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}) = \{(1,2),(2,0)\}$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим предикат $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}$ и найдем значение $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,2)$. Из теоремы 8 следует, что существует коллектив $\mathcal{A}$ типа $(1,2)$, сильно находящий сингулярную вершину грани $f_\infty(L)$ в любом конечном мозаичном лабиринте L. Возьмем две копии $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ коллектива $\mathcal{A}$.

Пусть L — произвольный конечный мозаичный лабиринт, и пусть x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, — произвольные вершины лабиринта L. Поскольку $\mathcal{A}_1$ в L_{x_1} и $\mathcal{A}_2$ в L_{x_2} сильно находят сингулярную вершину грани $f_\infty(L)$, то коллективы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ имеют (x_1,x_2)-встречу в L (на рис. 4 справа, с помощью символа $\circ$ обозначена сингулярная вершина внешней грани данного лабиринта). Поскольку x_1 и x_2 — две произвольные вершины лабиринта L, то получаем $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,2) = 1$. Подобным образом можно показать, что $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(2,0) = 1$. Ясно, что из полученного результата следует, что $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,2) = \mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(2,0) = 1$.

Далее покажем, что для любых двух коллективов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ типа $(1,1)$ можно найти конечный мозаичный лабиринт L и его вершины x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$ такие, что пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ не имеет (x_1,x_2)-встречу в L. Из теоремы 1 следует, что для $\mathcal{A}_1$ существует правильная ловушка

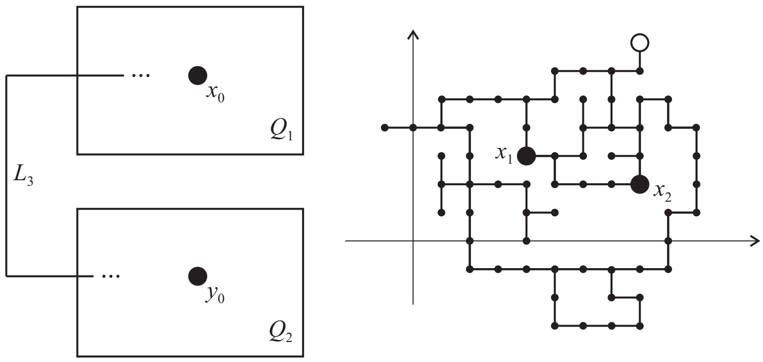


Рис. 4.

$(L_1; x_0, x_1)$ и для $\mathcal{A}_2$ существует правильная ловушка $(L_2; y_0, y_1)$. Очевидно, что существует мозаичный змеевидный лабиринт L_3 такой, что лабиринт $L_1 L_3 L_2^{-1}$ определен. На рис. 4 слева, $(L_1; x_0, x_1)$ и $(L_2; y_0, y_1)$ расположены внутри прямоугольников Q_1 и Q_2 соответственно, и для L_3 единственные две вершины, имеющие в $G(L_3)$ степень 1, выбраны в качестве его входа и выхода. Заметим, что любой параллельный перенос правильной ловушки для данного коллектива опять порождает правильную ловушку для него. Очевидно, что пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ не имеет (x_0, y_0)-встречу в L. Следовательно, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,1) = \mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,1) = 0$, что вместе с $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,2) = \mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(2,0) = 1$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,2) = \mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(2,0) = 1$ дает $\mathbf{U}(\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}) = \mathbf{U}(\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}) = \{(1,2),(2,0)\}$.

Теперь покажем, что $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,2,r,s) = 1$ для любых $r \geq 1$ и $s \geq 0$. Из теоремы 9 следует, что существует коллектив $\mathcal{A}$ типа $(1,2)$, который обходит любой конечный мозаичный лабиринт. Также, возьмем тривиальный коллектив $\mathcal{B}_0(r,s)$ типа (r,s). Пусть L — произвольный конечный мозаичный лабиринт, и пусть x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, — две различные вершины лабиринта L. Из теоремы 9 следует, что коллективы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_0(r,s)$ имеют (x_1, x_2)-встречу в L. Поскольку x_1 и x_2 — произвольные вершины лабиринта L, получаем, что $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,2,r,s) = 1$. Но, из $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,2,r,s) = 1$ следует, что $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,2,1,0) = 1$, а также, что $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,0,1,2) = 1$. Подобным образом получаем, что $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(2,0,1,0) = \mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,0,2,0) = 1$. Также, из $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,1) = 0$ получаем, что $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}(1,1,1,1) = 0$, и наше утверждение относительно предиката $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}$ верно. $\square$

Теперь предикаты $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}$ полностью описаны. На рис. 5 символом $\bullet$ отмечены точки (целочисленные), в которых предикаты $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{fm}}}$ принимают значение 0, а серая закрытая неограниченная область содержит точки, в которых они принимают значение 1.

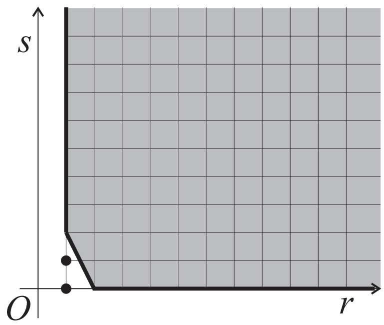
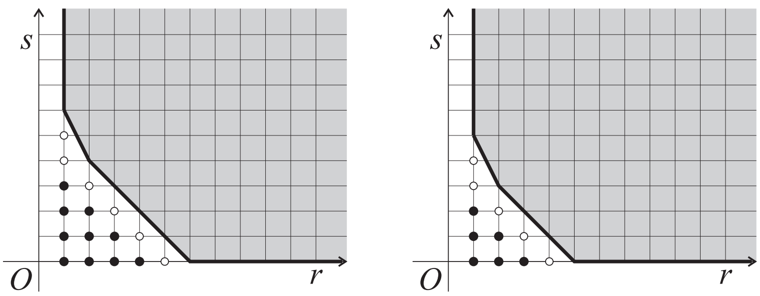


Рис. 5.

Проблема описания предикатов $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{m}}}$ и $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{m}}}$ открыта. На рис. 6 а) данно все, что мы знаем о $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\mathrm{m}}}$, а на рис. 6 б) — все, что мы знаем о $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\mathrm{m}}}$ (с помощью $\bullet$ отмечены все вершины, в которых данные предикаты принимают значение 0, с помощью $\circ$ — все точки, в которых значение этих предикатов неизвестно, а серая закрытая неограниченная область содержит все точки, в которых они принимают значение 1).



а) б)

Рис. 6.

Кроме этого, мы не можем полностью описать предикат $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{m}}}$. Мы знаем, что $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{m}}}(r_1, s_1, r_2, s_2) = 1$, или если $r_1 = 1$ и $s_1 \geq 5$, или если $r_1 \geq 2$ и $r_1 + s_1 \geq 5$. Также, мы знаем, что $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\mathrm{m}}}(r_1, s_1, r_2, s_2) = 0$, если $r_1 + s_1 \leq 3$ и $r_2 + s_2 \leq 3$.

Все приведенные результаты для предикатов $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$, когда $\mathfrak{L}$ является классом всех мозаичных лабиринтов, следуют из результатов, представленных в работах [11, 12, 13]. Также заметим, что все приведенные результаты (как в конечном, так и в произвольном случае) остаются в силе, если вместо мозаичных рассматриваем шахматные лабиринты.

Интересно заметить, что если переходим из двухмерного в трехмерное евклидовое пространство, тогда положение дел радикально меняется. В [14] доказано, что не существует коллектив автоматов, который является универсальным обходчиком для класса всех конечных мозаичных 3-лабиринтов толщины 2. Здесь под *толщиной* конечного мозаичного 3-лабиринта L подразумеваем минимальное число горизонтальных плоскостей, содержащих все множество $V(L)$. Имея в распоряжении этот результат, можно, подобно тому как ми это делали при доказательстве теоремы 10, построить, для любых двух коллективов автоматов, конечный мозаичный 3-лабиринт, в котором эти коллективы не решают проблему встречи. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 11. *Если $\mathfrak{L}$ — клас всех конечных мозаичных 3-лабиринтов, то $\mathbf{M}^i_{\mathfrak{L}} = 0$ для любого $0 \leq i \leq 2$.*

4. Проблема типовой встречи в прямоугольных лабиринтах

Интересно также исследовать предикаты $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$, когда $\mathfrak{L}$ является классом всех конечных прямоугольных лабиринтов или классом всех прямоугольных лабиринтов, т.е. когда мы отбрасываем условие одинаковой длины всех ребер. Поскольку множество всех конечных мозаичных лабиринтов $\mathfrak{L}_{\text{fm}}$ является подмножеством множества всех конечных прямоугольных лабиринтов $\mathfrak{L}_{\text{fr}}$, предикаты $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\text{fr}}}$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\text{fr}}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\text{fr}}}$ берут значение 0 там, где соответственно предикаты $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\text{fm}}}$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\text{fm}}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\text{fm}}}$ берут значение 0. Также, в [15] показано, что существует универсальный обходчик типа $(1,2)$ и универсальный обходчик типа $(2,0)$ для класса всех конечных прямоугольных лабиринтов. Отсюда следует, что имеет место утверждение аналогичное теореме 9 и для случая всех конечных прямоугольных лабиринтов.

Теорема 12. $\mathbf{U}(\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}_{\text{fr}}}) = \{(1,2,1,0),(2,0,1,0),(1,0,1,2),(1,2,1,0)\}$ *и* $\mathbf{U}(\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\text{fr}}}) = \mathbf{U}(\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\text{fr}}}) = \{(1,2),(2,0)\}$.

Доказательство этой теоремы можем провести таким же способом, как и в случае конечных мозаичных лабиринтов (см. теорему 10). Однако, когда рассматриваем предикаты $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}_{\text{fr}}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}_{\text{fr}}}$ в точках $(1,2)$ и $(2,0)$, любой из двух соответствующих коллективов автоматов ведет себя следующим образом: сначала он работает как универсальный обходчик класса всех конечных прямоугольных лабиринтов, пока не окажется в вершине, которая принадлежит границе внешней грани данного лабиринта, а потом все его автоматы кроме того, который движется вдоль положительной границы внешней грани, остаются в этой вершине.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс прямоугольных лабиринтов. Если $\mathbf{M}$ — один из предикатов $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$, и значение его в точке (i,j) равно 1, то говорим, что *сложность* предиката $\mathbf{M}$ в точке (i,j) есть $O(f(n))$, где $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ данная натуральная функция натурального переменного, если существует положительная константа C и существуют соответствующие коллективы типа (i,j), которые решают проблему встречи в любом лабиринте из $\mathfrak{L}$, имеющем n вершин за время, не превышающее значения $Cf(n)$. Подобным образом можно ввести сложность предиката $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$.

Из того, как мы устанавливали значения предикатов $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$ в случае, когда $\mathfrak{L}$ — класс конечных мозаичных лабиринтов, и из оценки сложности соответствующего алгоритма обхода этого класса лабиринтов, данной в работе [9], нетрудно убедиться, что в точке $(1,2)$ сложность этих предикатов есть $O(n^3)$ а в точке $(2,0)$ — $O(n^2)$.

Также из того, как мы устанавливали значения предикатов $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$ в случае, когда $\mathfrak{L}$ — класс конечных прямоугольных лабиринтов, и из оценки сложности соответствующего алгоритма обхода этого класса лабиринтов, данной в работе [15], нетрудно убедиться, что в точке $(1,2)$ сложность этих предикатов есть $O(n^4)$, а в точке $(2,0)$ — $O(n^3)$.

Данные оценки сложности можно улучшить, даже сделать их на порядок лучше. Покажем это на примере конечных прямоугольных лабиринтов.

Симметричный орграф $G=(V,E)$ является *прямолинейным плоским*, если $V\subseteq\mathbf{R}^2$ и множество $T=\{\overline{xy}\,|\,(x,y)\in E\}$ является конфигурацией (напомним, что существует так называемая теорема Фари о распрямлении графа, согласно которой любой простой планарный граф имеет плоское представление, в котором все ребра изображены в виде отрезков прямых).

Пусть G — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф и $\rho=x_0,e_1,x_1,\ldots,e_n,x_n$, где $x_n=x_0$, — некоторый его замкнутый маршрут.

Конечную последовательность $x_i,x_{i+_n1},\ldots,x_j$ вершин маршрута ρ, где $0\le i<n$ и $j=i+_n k$ для некоторого $0\le k<n$, назовем *ρ-интервалом* и обозначим через $[x_i,x_j]$; вершины x_i и x_j называются *концами* этого ρ-интервала, а все остальные его вершины являются его *внутренними вершинами* (через $-_n$ и $+_n$ обозначаем соответственно операции вычитания и суммирования по модулю n). Если все вершины ρ-интервала $[x_i,x_j]$ различные, то назовем его *простым ρ-интервалом*.

Пусть $[x_{k_1},x_{l_1}]$ и $[x_{k_2},x_{l_2}]$ — два ρ-интервала, и пусть a_1 и a_2, $0\le a_1,a_2<n$, — такие числа, что $l_1=k_1+_n a_1$ и $l_2=k_2+_n a_2$.

Пишем $[x_{k_1},x_{l_1}]\cap[x_{k_2},x_{l_2}]=\emptyset$ и говорим, что ρ-интервалы $[x_{k_1},x_{l_1}]$ и $[x_{k_2},x_{l_2}]$ *дизъюнктные*, если существует натуральное число b такое, что $k_2=l_1+_n b$ и $0<a_1+b+a_2<n$. Пишем $[x_{k_2},x_{l_2}]\subseteq[x_{k_1},x_{l_1}]$, если $k_2=k_1+_n b_1$ и $l_1=l_2+_n b_2$ для некоторых $0\le b_1,b_2\le a_1$.

Говорим, что простые ρ-интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ являются *противоположными*, и пишем $[x_{k_1}, x_{l_1}] \updownarrow [x_{k_2}, x_{l_2}]$, если $1 \le a_1 = a_2 = a \le n/2$ и если или $l_1 = k_2$ и $x_{l_1 -_n m} = x_{k_2 +_n m}$, или $l_2 = k_1$ и $x_{l_2 -_n m} = x_{k_1 +_n m}$ для любого $0 \le m \le a$. Без ограничения общности, в будущем, когда пишем $[x_{k_1}, x_{l_1}] \updownarrow [x_{k_2}, x_{l_2}]$, считаем, что $l_1 = k_2$; вершину $x_{l_1} = x_{k_2}$ назовем *пиковой* для ρ. Пиковая вершина y маршрута ρ называется *настоящей*, если существуют простые ρ-интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ такие, что $[x_{k_1 +_n 1}, x_{l_1}] \updownarrow [x_{k_2}, x_{l_2 -_n 1}]$, $x_{l_1} = x_{k_2} = y$, $x_{k_1} \ne x_{l_2}$ и $\measuredangle x_{k_1} x_{k_1 +_n 1} x_{l_2} > 0$, где $\angle x_{k_1} x_{k_1 +_n 1} x_{l_2}$ — тот из двух возможных углов, который не содержит вершину $x_{k_1 +_n 2}$. ρ-интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ называются ρ-интервалами, *определяющими* настоящую пиковою вершину y.

Пишем $[x_{k_1}, x_{l_1}] \upuparrows [x_{k_2}, x_{l_2}]$ $[[x_{k_1}, x_{l_1}] \uparrow\downarrow [x_{k_2}, x_{l_2}]]$, если ρ-интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ дизъюнктные, $a_1 = a_2 = a$ и

$$x_{k_1 +_n m} = x_{k_2 +_n m} \quad [x_{k_1 +_n m} = x_{l_2 -_n m}]$$

для любого $0 \le m \le a$.

Пусть x, y, z и w — четыре точки плоскости такие, что векторы $\vec{xy}$, $\vec{xz}$ и $\vec{xw}$ являются ненулевыми и векторы $\vec{xz}$ и $\vec{xw}$ являются неколлинеарными. Тогда пусть $-2\pi \le \alpha_1 < 0$ $[-2\pi \le \alpha_2 < 0]$ — отрицательный угол поворота вокруг точки x, который переводит вектор $\vec{xy}$ в вектор коллинеарный вектору $\vec{xz}$ $[\vec{xw}]$. Пусть $\alpha_x(y, z, w) = \alpha_2 - \alpha_1$.

Пишем $[x_{k_1}, x_{l_1}] \shortparallel [x_{k_2}, x_{l_2}]$ и говорим, что дизъюнктные ρ-интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ находятся в *правильном соотношении*, если $a_1 = a_2 = a \ge 2$ и если удовлетворено одно из следующих трех условий:

1) $a = 2$ и ни одна из вершин x_{k_1} и x_{l_1} не совпадает ни с одной из вершин x_{k_2} и x_{l_2} (случай 1);

2) $a \ge 3$, и при этом $[x_{k_1 +_n 1}, x_{l_1 -_n 1}] \uparrow\downarrow [x_{k_2 +_n 1}, x_{l_2 -_n 1}]$, $x_{k_1} \ne x_{l_2}$ и $x_{l_1} \ne x_{k_2}$ (случай 2);

3) $a \ge 3$, и при этом $[x_{k_1 +_n 1}, x_{l_1 -_n 1}] \upuparrows [x_{k_2 +_n 1}, x_{l_2 -_n 1}]$, $x_{k_1} \ne x_{k_2}$ и $x_{l_1} \ne x_{l_2}$ (случай 3).

Обозначим через $\alpha([x_{k_1}, x_{l_1}], [x_{k_2}, x_{l_2}])$ значение

$$\alpha_{x_{k_1 +_n 1}}(x_{k_1 +_n 2}, x_{k_1}, x_{l_2}) \alpha_{x_{l_1 -_n 1}}(x_{l_1 -_n 2}, x_{l_1}, x_{k_2}),$$

если имеет место случай 2, или значение

$$\alpha_{x_{k_1 +_n 1}}(x_{k_1 +_n 2}, x_{k_1}, x_{k_2}) \alpha_{x_{l_1 -_n 1}}(x_{l_1 -_n 2}, x_{l_1}, x_{l_2})$$

если имеет место случай 3.

Пару вершин (x_i, x_j), $0 < i < j \le n$, маршрута ρ называем его *квазипересечением*, если $x_i = x_j$. Квазипересечение (x_i, x_j) назовем *настоящим*, если существуют ρ-интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ такие, что:

1) вершина x_i является внутренней вершиной ρ-интервала $[x_{k_1}, x_{l_1}]$,

2) вершина x_j является внутренней вершиной ρ-интервала $[x_{k_2}, x_{l_2}]$,

3) или ρ-интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ определяют настоящую пиковую вершину, или они находятся в правильном соотношении.

Настоящее квазипересечение (x_i, x_j) является *касанием*, если имеет место одно из следующих условий:

1) ρ-интервалы $[x_{k_1}, x_{l_1}]$ и $[x_{k_2}, x_{l_2}]$ определяют настоящую пиковую вершину;

2) имеет место или случай 2, или случай 3, и $\alpha(x_{k_1}, x_{l_1}; x_{k_2}, x_{l_2}) < 0$;

3) имеет место случай 1 и угол $\angle x_{k_1} x_{k_1 +_n 1} x_{l_1}$ (любой из двух возможных) или содержит обе вершины x_{k_2} и x_{l_2}, или не содержит ни одну из них.

Если настоящее квазипересечение (x_i, x_j) не является *касанием*, то его назовем *самопересечением*.

Пусть G — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф. Нетривиальный замкнутый маршрут орграфа G называется *регулярным*, если все его квазипересечения настоящие. Регулярный замкнутый маршрут орграфа G называется *квазипростым контуром*, если все его квазипересечения являются касаниями.

Пусть G — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф и $\rho = x_0, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n$ — некоторый его нетривиальный регулярный замкнутый маршрут. Каждой вершине x_i, $1 \leq i \leq n$, маршрута ρ присоединим число $\alpha(x_i)$ следующим способом. Если x_i — настоящая пиковая вершина маршрута ρ, то $\alpha(x_i) = -\pi/2$; в противном случае переведем точку $x_{i -_n 1}$ в точку $x'_{i -_n 1}$ с помощью центральной симметрией относительно точки x_i, и положим, что $\alpha(x_i)$ — угловая мера со знаком угла $\angle x'_{i -_n 1} x_i x_{i +_n 1}$ (меньшего из двух возможных); положительным направлением отсчета углов считается направление против часовой стрелки (см. рис. 7). *Поворотом* вдоль маршрута ρ называем число

$$\alpha_{\circlearrowleft}(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i).$$

Ясно, что повороты вдоль двух циклически одинаковых нетривиальных регулярных замкнутых маршрутов одинаковые.

Пусть $\rho = x_0, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n$, $n \geq 3$, — простой контур в G. Поскольку тогда замкнутая ломаная линия без самопересечения $x_0 x_1 \ldots x_n$ является контуром многоугольника (в общем случае невыпуклого), то имеет место следующее утверждение.

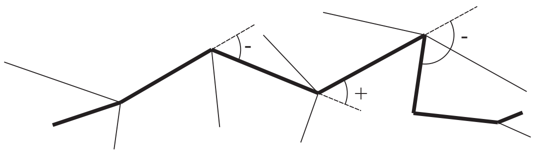


Рис. 7.

Теорема 13. *Пусть G — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф и ρ — некоторый его простой контур длины ≥ 3. Тогда $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho) = -2\pi$ или $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho) = 2\pi$.*

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф, и $\rho = x_0, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n$ — некоторый его замкнутый маршрут.

Маршрут ρ *проходит* по некоторому ребру $\langle y_1, y_2 \rangle$ орграфа G, если или $[y_1, y_2]$, или $[y_2, y_1]$ является ρ-интервалом. Маршрут ρ *проходит* через некоторую вершину y орграфа G, если $y = x_i$ для некоторого $0 \leq i \leq n-1$.

Пусть y_1 и y_2 — две смежные вершины орграфа G (смежные в соответствующем простом графе), и положим, что маршрут ρ проходит по ребру $\langle y_1, y_2 \rangle$. Пусть $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, — все вхождения дуг (y_1, y_2) и (y_2, y_1) в маршрут ρ; любую из дуг e_{i_j}, $1 \leq j \leq k$, назовем *вхождением* ребра $\langle y_1, y_2 \rangle$ в ρ. Назовем число k *кратностью маршрута ρ вдоль* ребра $\langle y_1, y_2 \rangle$.

Для любых двух смежных вершин y_1 и y_2 орграфа G введем число $||\rho||_{\langle ! y_1, y_2 \rangle}$ следующим образом. Пусть $||\rho||_{\langle y_1, y_2 \rangle} = 0$, если маршрут ρ не проходит по ребру $\langle y_1, y_2 \rangle$, и $||\rho||_{\langle y_1, y_2 \rangle} = k-1$, если маршрут ρ проходит по ребру $\langle y_1, y_2 \rangle$, и его кратность вдоль ребра $\langle y_1, y_2 \rangle$ равна k. *Мерой дублирования по дугам* маршрута ρ в орграфе G назовем число

$$||\rho|| = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} ||\rho||_{\langle x, y \rangle}.$$

Пусть y — вершина орграфа G, и положим, что маршрут ρ проходит через вершину y. Пусть $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, $1 \leq k < n$, — все *вхождения* вершины y в маршрут ρ. Назовем число k *кратностью маршрута ρ в* вершине y.

Для любой вершины y орграфа G введем число $||\rho||_y$ следующим образом. Пусть $||\rho||_y = 0$, если маршрут ρ не проходит через вершину y, и $||\rho||_y = k-1$, если маршрут ρ проходит через вершину y, и его кратность в вершине y равна k. *Мерой дублирования по вершинам* маршрута ρ в орграфе G назовем число

$$||\rho||_0 = \sum_{v \in V} ||\rho||_v.$$

Теорема 14. *Пусть $G = (V, E)$ — некоторый прямолинейный плоский симметричный орграф и $\rho = x_0, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n$ — некоторый его квазипростой контур. Тогда, $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho) = \pm 2\pi$.*

Доказательство. Пусть $\sigma = x'_0, e'_1, x'_1, \ldots, e'_m, x'_m$ — некоторый замкнутый маршрут орграфа G, проходящий по некоторому ребру $<y_1, y_2>$ орграфа G (см. рис. 8), и предположим, что $||\sigma||_{<y_1,y_2>} = 0$. Пусть e'_i — единственное вхождение ребра $<y_1, y_2>$ в σ. Ясно, что к орграфу G можно добавить точку $z \in \mathbf{R}^2$ в качестве его новой вершины, и пары (z, y_1), (y_1, z), (z, y_2) и (y_2, z) в качестве его новых дуг, чтобы таким образом полученный орграф G' являлся также прямолинейным плоским симметричным орграфом. Замкнутый маршрут

$$\sigma' = \ldots, e'_{i-_m 1}, x'_{i-_m 1}, (x'_{i-_m 1}, z), z, (z, x_i), e'_{i+_m 1}, \ldots$$

очевидно удовлетворяет свойству $\alpha_{\circlearrowleft}(\sigma') = \alpha_{\circlearrowleft}(\sigma)$ (см. рис. 8). То, что пара (G', σ') таким образом получена из пары (G, σ), обозначим через $(G, \sigma) \mapsto_z^{e'_i} (G', \sigma')$.

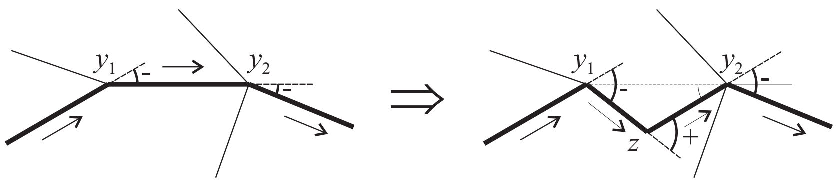


Рис. 8.

Сейчас предположим, что для некоторого ребра $<y_1, y_2>$ орграфа G имеет место $||\rho||_{<y_1,y_2>} = k - 1 \geq 1$ (на рис. 9 изображен случай, когда $||\rho||_{<y_1,y_2>} = 2$; на этом рисунке представлена только та часть орграфа G, которая содержит ребро $<y_1, y_2>$, и те части маршрута ρ, которые проходят вдоль этого ребра, причем эти части, из-за наглядности, немного отделены). Пусть $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}$ — все вхождения ребра $<y_1, y_2>$ в ρ. Пусть $x_{i'_1}, x_{i'_2}, \ldots, x_{i'_k}$ — вершины соответсвенно дуг $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}$ такие, что $x_{i'_j} = x_{i_1}$ для любого $1 \leq j \leq k$ (значит, $i'_j = i_j$ или $i'_j = i_j -_n 1$ для любого $1 \leq j \leq k$). Поскольку для любых $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$ пара $(x_{i'_{j_1}}, x_{i'_{j_2}})$ является касанием, очевидно, что существуют точки плоскости z_j, $1 \leq j \leq k$, такие, что последовательность пар (G_j, ρ_j), $1 \leq j \leq k$, удовлетворяет условиям $(G_{j-1}, \rho_{j-1}) \mapsto_{z_j}^{e_{i_j}} (G_j, \rho_j)$ для любого $1 \leq j \leq k$, где $(G_0, \rho_0) = (G, \rho)$. Тогда пара $(G', \rho') = (G_k, \rho_k)$ является такой, что G' — прямолинейный плоский симметричный орграф, а ρ' — квазипростой контур орграфа G' (на рис. 9 к G добавляем три вершины z_1, z_2 и z_3). Ясно, что $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho') = \alpha_{\circlearrowleft}(\rho)$ и $||\rho'|| < ||\rho||$. Следовательно можно предположить, что $||\rho|| = 0$.

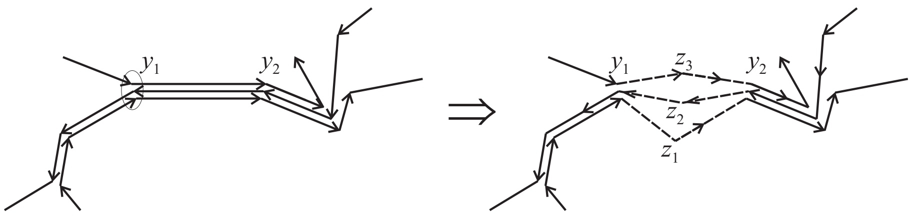


Рис. 9.

Пусть $||\rho||_y \geq 1$ для некоторой вершины y орграфа G, и пусть x_i и x_j, $0 < i < j \leq n$, два различных вхождения вершины y в ρ. Ясно, что можно в качестве вершин добавить точки $y_i, z_i, y_j, z_j \notin V(G)$, и убрать вершины x_i и x_j, проделывая с данным орграфом G и данным маршрутом ρ то, что указано на рис. 10, и при этом получить прямолинейный плоский симметричный орграф G' и маршрут ρ', являющийся квазипростым контуром. Ясно, что $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho') = \alpha_{\circlearrowleft}(\rho)$ и $||\rho'||_0 < ||\rho||_0$.

Проделывая описанную операцию пока это возможно, мы можем орграф G и квазипростой контур ρ “превратить” в прямолинейный плоский симметричный орграф G' и квазипростой контур ρ' такой, что $\alpha_{\circlearrowleft}(\rho') = \alpha_{\circlearrowleft}(\rho)$ и $||\rho'||_0 = 0$.

Значит, мы можем предположить, что для данного маршрута ρ имеет место $||\rho|| = 0$ и $||\rho||_0 = 0$. Но тогда, очевидно, из теоремы 13 следует, что данное утверждение верно. $\square$

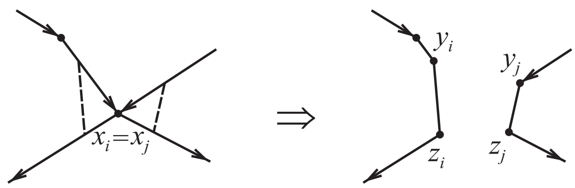


Рис. 10.

Вернемся теперь к прямоугольным лабиринтам и сначала введем некоторые необходимые понятия и обозначения.

Пусть $\alpha = \omega_1 \ldots \omega_n \in \mathfrak{D}^+$ — произвольное слово из $\mathfrak{D}^+$. Через $\mathrm{f}(\alpha)$ и $\mathrm{l}(\alpha)$ обозначим соответственно первую и последнюю его букву, т.е., $\mathrm{f}(\alpha) = \omega_1$ и $\mathrm{l}(\alpha) = \omega_n$. Через $\alpha|_i^j$, где $1 \leq i \leq j \leq n$, обозначим подслово

$\omega_i \ldots \omega_j$ слова α. Говорим, что слово $\beta \in \mathfrak{D}^*$ является началом [концом] слова α, если существует слово $\gamma \in \mathfrak{D}^*$, такое, что $\alpha = \beta\gamma$ $[\alpha = \gamma\beta]$; β является собственным началом [концом] слова α, если β является началом [концом] слова α и $\beta \neq \alpha$.

Для любого слова $\alpha \in \mathfrak{D}^*$ через $\nu(\alpha)$ обозначим слово, полученное из α, когда в нем заменим, пока это возможно, любое вхождение подслов $\omega\omega^{-1}$, $\omega \in \mathfrak{D}$, на пустое слово Λ, или, как мы еще будем говорить, $\nu(\alpha)$ получается из α *исчерпывающим применением* правил редукции $\omega\omega^{-1} \to \Lambda$, $\omega \in \mathfrak{D}$ (например, если $\alpha = \mathbf{wwnsesnn}$, то $\nu(\alpha) = \mathbf{wn}$). Легко убедиться, что невзирая на порядок выполнения этих правил редукции над словом α, результатом их исчерпывающего применения является то же самое слово, которое мы и обозначаем через $\nu(\alpha)$. Непустое слово $\alpha \in \mathfrak{D}^+$ является *простым словом* над $\mathfrak{D}$, если $\alpha = \nu(\alpha)$; через $\mathrm{Sim}(\mathfrak{D})$ обозначим множество всех простых слов над $\mathfrak{D}$.

Теперь над словами множества $\mathrm{Sim}(\mathfrak{D})$ будем применять правила редукции $\omega\omega \to \omega$ и $\omega\omega'\omega \to \omega$, где ω и ω', $\omega \neq \omega'$, — произвольные элементы множества $\mathfrak{D}$. Нетрудно удостовериться, что исчерпывающее применение этих правил редукции, в любом порядке, над любым словом $\alpha \in \mathrm{Sim}(\mathfrak{D})$ дает в качестве результата всегда одно и то же слово, которое мы обозначим через $[\alpha]$ (это можно сделать, например, применением математической индукции к длине слова α).

Введем подмножество $\mathrm{Sim}_0(\mathfrak{D}) \subseteq \mathrm{Sim}(\mathfrak{D})$ следующим образом: слово $\alpha = \omega_1 \ldots \omega_n \in \mathrm{Sim}(\mathfrak{D})$ принадлежит $\mathrm{Sim}_0(\mathfrak{D})$ тогда и только тогда, когда $\omega_1 \neq \omega_n^{-1}$.

На множестве $\mathrm{Sim}_0(\mathfrak{D})$ введем отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: для любых $\alpha', \alpha \in \mathrm{Sim}_0(\mathfrak{D})$, имеет место $\alpha' \sim \alpha$, если существуют слова $\beta, \beta' \in \mathfrak{D}^*$ такие, что $\alpha = \beta\beta'$ и $\alpha' = \beta'\beta$. Классы эквивалентности отношения $\sim$ называются (*простыми*) *циклическими словами* над $\mathfrak{D}$; каждый из этих класов будем обозначать просто любым его представителем с $\circlearrowleft$ в индексе. Через K^+ обозначим циклическое слово $\mathbf{enws}_{\circlearrowleft}$, а через K^- обозначим циклическое слово $\mathbf{eswn}_{\circlearrowleft}$.

Возьмем произвольное слово $\alpha \in \mathrm{Sim}(\mathfrak{D})$. Очевидно, что $\mathrm{f}([\alpha]) = \mathrm{f}(\alpha)$ и $\mathrm{l}([\alpha]) = \mathrm{l}(\alpha)$. В [16] показано (в чем нетрудно убедиться), что существуют $\beta \in K^- \cup K^+$, $n \in \mathbf{N}_0$ и некоторое собственное начало β' слова β такие, что $[\alpha] = \beta^n\beta'$; здесь полагаем, что $\beta^0 = \Lambda$.

Пусть $\alpha = \omega_1 \ldots \omega_n \in \mathfrak{D}^+$ — произвольное слово. Применим над словом α всевозможные замены ввида $\omega\omega^{-1} \to \omega\sigma_-(\omega)\omega^{-1}$, $\omega \in \mathfrak{D}$. Полученное слово обозначим через $\upharpoonleft\alpha\downharpoonright$. Очевидно, что $\mathrm{f}(\upharpoonleft\alpha\downharpoonright) = \mathrm{f}(\alpha)$ и $\mathrm{l}(\upharpoonleft\alpha\downharpoonright) = \mathrm{l}(\alpha)$. Обозначим через $\upharpoonleft\alpha\downharpoonright^\circ$ слово $\upharpoonleft\alpha\downharpoonright\sigma_-(\omega_n)$, если $\omega_1 = \omega_n^{-1}$; в противном случае положим, что $\upharpoonleft\alpha\downharpoonright^\circ = \upharpoonleft\alpha\downharpoonright$. Заметим, что $\upharpoonleft\alpha\downharpoonright \in \mathrm{Sim}(\mathfrak{D})$ и $\upharpoonleft\alpha\downharpoonright^\circ \in \mathrm{Sim}_0(\mathfrak{D})$ для любого $\alpha \in \mathfrak{D}^+$.

Пусть $M_1, \dots, M_n$ — различные точки плоскости, такие что $M_i \neq M_{i+1}$ для любого $1 \leq i \leq n-1$. *Ломаной* $M_1 \dots M_n$ будем считать ориентированную кривую, для которой *стандартным представлением* является непрерывная функция $r : [0,1] \to \mathbf{R}^2$, линейно отображающая каждый отрезок $[i/n, (i+1)/n]$ $(0 \leq i \leq n-1)$ на отрезок $\overline{M_i M_{i+1}}$. Отрезки $\overline{M_i M_{i+1}}$, $1 \leq i \leq n-1$, называются *звеньями* ломаной. Из данного определения следует, что два звена ломаной могут пересекаться, могут содержаться одно в другом и даже совпадать.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, f — некоторая его грань и

$$x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, e_n, x_n \tag{1}$$

— некоторый его маршрут. Ломаную $x_0 x_1 x_2 \dots x_n$, определенную вершинами маршрута (1), назовем его *прямоугольным следом*. Маршрут (1) называется f-*маршрутом*, если $x_i \in b(f)$ для любого $0 \leq i \leq n$. Маршрут (1) называется *положительным* [*отрицательным*] f-маршрутом, если он является f-маршрутом, если

$$|e_{i+1}| = (|e_i|^{-1})^{-}([x_i]) \quad [|e_{i+1}| = (|e_i|^{-1})^{+}([x_i])]$$

для любого $0 \leq i \leq n-1$ и если f находится слева [справа] от дуги e_1. Заметим, что если маршрут (1) является положительным [отрицательным] f-маршрутом, то грань f находится слева [справа] от дуги e_i для любого $1 \leq i \leq n$.

Маршрут (1) называется $\circlearrowleft$-*границей* грани f (*с вершиной привязки* x_0), если он положительный f-маршрут, если он замкнут, т.е. $x_0 = x_n$, и если $|e_1| = (|e_n|^{-1})^{-}([x_n])$. Очевидно, что все $\circlearrowleft$-границы грани f “циклически одинаковы” и отличаются только своими точками привязки.

Пусть L — прямоугольный лабиринт. Для любого $x \in V(L)$ пару $(x, \overleftarrow{\omega})$ $[(x, \overrightarrow{\omega})]$ назовем $\overleftarrow{\omega}$-*точкой* [$\overrightarrow{\omega}$-*точкой*] лабиринта L, если $\overline{\omega} \in [x]$ $[\omega \in [x]]$. Вершина x называется *носителем* $\overleftarrow{\omega}$-точки $(x, \overleftarrow{\omega})$ [$\overrightarrow{\omega}$-точки $(x, \overrightarrow{\omega})$] лабиринта L. В дальнейшем, пару $(x, \overleftarrow{\omega})$ $[(x, \overrightarrow{\omega})]$ обозначим через $x|_{\overleftarrow{\omega}}$ $[x|_{\overrightarrow{\omega}}]$ и, если не акцентируем ее тип, назовем *орточкой* лабиринта L. Орточку лабиринта L назовем *внутренней*, если лабиринт L конечен и носитель этой орточки не принадлежит множеству $b(f_\infty(L))$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт и f — некоторая его грань. Пусть маршрут (1) является $\circlearrowleft$-границей грани f. Орточку $(x, \overleftarrow{\omega})$ $[(x, \overrightarrow{\omega})]$ лабиринта L назовем $\overleftarrow{\omega}$-*точкой* [$\overrightarrow{\omega}$-*точкой*] грани f, если $x = x_i$ $[x = x_{i-1}]$ и $\omega = |e_i|$ для некоторого $1 \leq i \leq n$. Ясно, что если $(x, \overleftarrow{\omega})$ $[(x, \overrightarrow{\omega})]$ является $\overleftarrow{\omega}$-точкой [$\overrightarrow{\omega}$-точкой] грани f, то она является такой при любом выборе вершины привязки для $\circlearrowleft$-границы грани f, и существует только одно значение i, удовлетворяющее верхнему условию. Из-за предыдущего замечания вершину x_i $[x_{i-1}]$ будем иногда называть $\overleftarrow{|e_i|}$-*точкой* [$\overrightarrow{|e_i|}$-

точкой] грани f. Также ясно, что некоторая вершина $x \in b(f)$ может быть носителем нескольких $\overleftarrow{\omega}$-точек [$\overrightarrow{\omega}$-точек] грани f.

Предположим опять, что маршрут (1) является $\circlearrowleft$-границей грани f. Выделим n точек $x'_0, x'_1, \ldots x'_{n-1}$ множества f, а также, для любого $0 \le i \le n-1$, выделим точку x''_i множества f, если x_i является висячей вершиной в L. Все эти точки выбираем так, чтобы они между собой различались. Несложно убедиться (см. рис. 11), что эти точки можно выбрать таким образом, что они будут определять прямоугольный циклический лабиринт, в котором для любого $0 \le i \le n-1$:

если x_i является висячей вершиной в L, то вершины x'_i и x''_i, а также вершины x''_i и x'_{i+_n1}, являются смежными, $|(x'_i, x''_i| = \sigma_-|e_i|$ и $|(x''_i, x'_{i+_n1})| = |(x_i, x_{i+_n1})|$;

если x_i не является висячей вершиной в L, то вершины x'_i и x'_{i+_n1} являются смежными и $|(x'_i, x'_{i+_n1})| = |(x_i, x_{i+_n1})|$.

Ясно (см. рис. 11), что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно предположить, что расстояние (в евклидовой плоскости) между точками x_i и x'_i, а также между точками x_i и x''_i (если такие пары существуют) меньше ε. Обозначим через $L_\varepsilon(f)$ лабиринт такого типа. Также пусть $\overline{x'_i} = x_i$ и $\overline{x''_i} = x_i$ (если определено x''_i) для любого $0 \le i \le n-1$. На рис. 11 прерывистой линией представлен лабиринт $L_\varepsilon(f)$ для выделенной грани f изображенного прямоугольного лабиринта L.

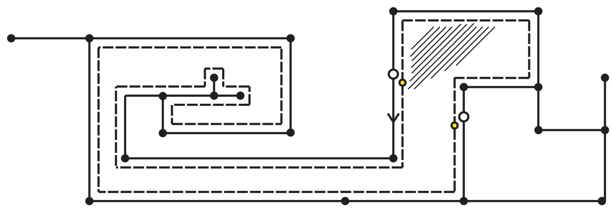


Рис. 11.

$\circlearrowleft$-границу единственной ограниченной грани $\hat{f}_\varepsilon$ лабиринта $L_\varepsilon(f)$ назовем *расширенной $\circlearrowleft$-границей* грани f; дуги этой границы типа (x'_i, x''_i) назовем *виртуальными*, а остальные — *реальными дугами* грани f. Дуга грани f, *соответствующая* реальным дугам (x'_i, x'_{i+_n1}) и (x''_i, x'_{i+_n1}), есть дуга (x_i, x_{i+_n1}). Если маршрут (1) является $\circlearrowleft$-границей грани f с вершиной привязки x_0, то *сопряженной* с ней расширенной $\circlearrowleft$-границей является расширенная $\circlearrowleft$-граница грани f с вершиной привязки x''_0, если x_0 является висячей вершиной, или с вершиной привязки x'_0, если x_0 не является висячей вершиной.

Все орточки грани $\hat{f}_\varepsilon$ в $L_\varepsilon(f)$ являются *виртуальными орточками* грани f в L. *Реальным носителем* виртуальной орточки любого типа с носителем x'_i или x''_i, если x''_i существует для данного i, назовем вершину

x_i; $0 \le i \le n-1$. В последующем, виртуальную орточку всегда будем представлять в виде пары, первый компонент у которой — ее реальный носитель, а второй — ее тип, поскольку эти два элемента полностью определяют данную виртуальную точку. С любой орточкой $x|_{\overrightarrow{\omega}}$ $[x|_{\overleftarrow{\omega}}]$ грани f *сопряжена* виртуальная орточка $x|_{\overrightarrow{\omega}}$ $[x|_{\overleftarrow{\omega}}]$ грани f.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, f — некоторая его грань, и $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}$ и $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}$ — две орточки [виртуальные орточки] грани f. Пусть

$$x_0, e_1, x_1, e_2, \ldots, e_n, x_n$$

есть $\circlearrowleft$-граница [расширенная $\circlearrowleft$-граница] грани f такая, что $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}} = x_0|_{\overrightarrow{|e_1|}}$ $[v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}} = \overline{x}_0|_{\overrightarrow{|e_1|}}]$. Тогда $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}} = x_i|_{\overleftarrow{|e_i|}}$ $[v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}} = \overline{x}_i|_{\overleftarrow{|e_i|}}]$ для некоторого $0 < i \le n$. Обозначим через

$$\rho_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}) \quad [\hat{\rho}_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})]$$

маршрут $x_0, e_1, x_1, e_2, \ldots, e_i, x_i$ и назовем его *частью $\circlearrowleft$-границы* [*расширенной $\circlearrowleft$-границы*] грани f в L между орточками [виртуальными орточками] $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}$ и $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}$, а через

$$\alpha_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}) \quad [\hat{\alpha}_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})]$$

обозначим слово $|e_1||e_2|\ldots|e_i|$ и назовем его словом, *соответствующим* этой части. Словом *соответствующим* $\circlearrowleft$-границе [расширенной $\circlearrowleft$-границе] грани f (с вершиной привязки x_0) является слово $|e_1||e_2|\ldots|e_n|$ $[\uparrow|e_1||e_2|\ldots|e_n|\downarrow]$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, f — некоторая его грань, $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}$ и $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}$ — две орточки грани f, и $x_0, e_1, x_1, e_2, \ldots, e_n, x_n$ — $\circlearrowleft$-граница грани f такая, что $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}} = x_0|_{\overrightarrow{|e_1|}}$. Тогда, как и выше, $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}} = x_i|_{\overleftarrow{|e_i|}}$ для некоторого $0 < i \le n$. Пусть

$$\alpha_f^{\circ}(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}) = \uparrow|e_1||e_2|\ldots|e_i|\downarrow.$$

Заметим, что $\alpha_f^{\circ}(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}) = \hat{\alpha}_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})$, когда $i < n$ (см. вышеданный договор о написании виртуальных орточек).

Число $\kappa_f(v_1|_{\overleftarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})$ назовем *кручением* $\circlearrowleft$-границы грани f между орточками $v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}$ и $v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}}$, если

$$[\alpha_f^{\circ}(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})] = \beta^{\kappa_f(v_1|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v_2|_{\overleftarrow{\omega_2}})}\beta'$$

для некоторого слова $\beta \in K^- \cup K^+$ и некоторого настоящего начала β' слова β. Из вышесказанного следует, что кручение границы данной грани между любыми ее орточками всегда определено.

Пусть $\alpha_{\circlearrowleft} \in \mathrm{Sim}_0(\mathfrak{D})/\sim$ — произвольное циклическое слово. Рассмотрим правила редукции $\omega\omega \to \omega$ и $\omega\omega'\omega \to \omega$, где ω и ω', $\omega \ne \omega'$, —

произвольные элементы множества $\mathfrak{D}$, а также правило циклического сдвига $\alpha\beta \to \beta\alpha$, где α и β произвольные слова из $\mathfrak{D}^+$. Нетрудно удостовериться, что применяя эти правила, в любой последовательности, до тех пор, пока можно получить новый результат, из слова $\alpha_\circlearrowleft$ получим одно и то же циклическое слово, которое обозначим через $[\alpha]_\circlearrowleft$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, f — некоторая его грань и $x_0, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n$ — $\circlearrowleft$-граница грани f. Пусть $[f] = [\upharpoonleft|e_1||e_2|\ldots|e_n|\downharpoonleft^\circ]_\circlearrowleft$. Из результатов работ [16] и [17] имеем следующее утверждение.

Теорема 15. *Пусть L — прямоугольный лабиринт и f — некоторая его грань. Тогда $[f] = \mathbf{enws}_\circlearrowleft$, если f — внутренняя грань лабиринта L и $[f] = \mathbf{eswn}_\circlearrowleft$, если f — его внешняя грань.*

Для любого замкнутого маршрута ρ прямоугольный лабиринт L обозначим через $[\rho]$ слово $[\upharpoonleft|\rho|\downharpoonleft^\circ]_\circlearrowleft$. Нетрудно убедится, что также имеет место следующее утверждение (см. теорему 14).

Теорема 16. *Для любого нетривиального квазипростого контура ρ прямоугольного лабиринта L имеет место, что $[\rho] = \mathbf{enws}_\circlearrowleft$ $[[\rho] = \mathbf{eswn}_\circlearrowleft]$ тогда и только тогда, когда $\alpha_\circlearrowleft(\rho) = 2\pi$ $[\alpha_\circlearrowleft(\rho) = -2\pi]$.*

Пусть L — прямоугольный лабиринт, и пусть p — некоторая прямая. Говорим, что прямая p пересекается с некоторой дугой (x, y) лабиринта L, если p содержит только одну внутреннюю точку отрезка $\overline{xy}$.

В последующем тексте, для любых целых чисел i и j, $i \le j$, иногда будем обозначать через $\overline{i, j}$ множество всех целых чисел n, удовлетворяющих условию $i \le n \le j$.

Пусть L — прямоугольный лабиринт, $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ — его произвольная $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точка, f — грань лабиринта L, находящаяся слева от вектора $\overrightarrow{v(v\mathbf{s})}$, и $b_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}(f)$ — множество всех $\overleftarrow{\mathbf{n}}$-точек грани f. Множество всех орточек $x|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}} \in b_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}(f)$ таких, что $\alpha_f^\circ(v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}, x|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}) = \mathbf{sen}$ назовем 0-*классом* орточки $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 17. 0-*класс любой внутренней орточки прямоугольного лабиринта является непустым.*

Доказательство. Пусть L — прямоугольный лабиринт, $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ — его произвольная внутренняя $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точка, f — внутренняя грань лабиринта L, находящаяся слева от вектора $\overrightarrow{v(v\mathbf{s})}$, и $x_0, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n$, где $(x_0, \overrightarrow{|e_1|}) = v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$, — $\circlearrowleft$-граница грани f.

Проложим прямую p параллельную x-оси через некоторую внутреннюю точку w_1 отрезка $\overline{v(v\mathbf{s})}$ так, чтобы она не содержала ни одну вершину лабиринта L. Ясно, что можно выбрать достаточно малое $\varepsilon > 0$ так, что прямая p не пересекается ни с одной виртуальной дугой грани f.

Пусть T — первая, лежащая на прямой p справа от w_1, точка множества $\overline{L_\varepsilon(f)}$, и пусть e — реальная дуга грани f, пересекающаясь с прямой p именно в точке T. Очевидно, что $|e| = \mathbf{n}$. Пусть (x_{i-1}, x_i) $(0 < i < n)$ дуга лабиринта L соответствующая ее реальной дуге e. Обозначим через w_2 точку пересечения прямой p с отрезком $\overline{x_{i-1}x_i}$. Рассмотрим лабиринт $(L \oplus w_1) \oplus w_2$ и добавим к нему в качестве новых дуг пары (w_1, w_2) и (w_2, w_1). Положим, что $(w_1, w_2) = \mathbf{e}$ и $(w_2, w_1) = \mathbf{w}$. Обозначим таким способом полученный лабиринт через L'. Тогда маршрут

$$w_1, (w_1, x_1), x_1, e_2, x_2, \ldots, x_{i-2}, e_{i-1}, x_{i-1}, (x_{i-1}, w_2), w_2, (w_2, w_1), w_1$$

является $\circlearrowleft$-границей некоторой ограниченной грани f' лабиринта L'. Поскольку $[f'] = \mathbf{senw}$ (см. теорему 15), а также вершины w_1 и w_2 являются вершинами степени 2, то

$$[\upharpoonleft|(w_1, x_1)||e_2| \ldots |e_{i-1}||(x_{i-1}, w_2)||\downharpoonleft] = \mathbf{sen}.$$

Отсюда следует, что орточка $x_i|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ принадлежит 0-классу орточки $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$, и наша теорема верна. $\square$

Теорема 18. *Пусть L — прямоугольный лабиринт, f — некоторая его внутренняя грань, $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ — $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точка грани f и $x_0, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n$ — расширенная $\circlearrowleft$-граница грани f, где $\overline{x}_0|_{\overrightarrow{|e_1|}}$ — виртуальная орточка, которая сопряжена с орточкой $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$. Если i_0 — минимальное число среди чисел $\overline{1,n}$ такое, что $[|e_1||e_2| \ldots |e_{i_0}|] = \mathbf{sen}$, то e_{i_0} — реальная дуга грани f, и, следовательно, $\overline{x}_{i_0}|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ является орточкой грани f, которая принадлежит 0-классу орточки $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$.*

Доказательство. Заметим сначала, что из теоремы 17 следует, что упомянутое в условиях теоремы число i_0 существует.

Предположим, что имеет место обратное, т.е. дуга e_{i_0} является виртуальной дугой грани f. Но тогда $[|e_1||e_2| \ldots |e_{i_0-1}|] = \mathbf{s} \ldots \mathbf{w}$ и, следовательно, $[|e_1||e_2| \ldots |e_{i_0-1}|] = \mathbf{senw}$. Значит, i_0 не является минимальным числом среди чисел $\overline{1,n}$ таким, что $[|e_1||e_2| \ldots |e_{i_0}|] = \mathbf{sen}$. Из полученного противоречия следует утверждение теоремы. $\square$

Пусть L — прямоугольный лабиринт, $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ — некоторая его $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точка, f — грань лабиринта L, находящаяся слева от вектора $\overrightarrow{v(v\mathbf{s})}$, и

$$x_0, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n,$$

где $(x_0, \overrightarrow{|e_1|}) = v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ — $\circlearrowleft$-граница грани f. Предположим, что существует $1 \leq i_0 < n$ такое, что орточка $x_{i_0}|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ принадлежит 0-классу орточки

$v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}} = x_0|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$, а для любого $1 \le i < i_0$ орточка $(x_i, \overleftarrow{|e_i|})$ не принадлежит ему. Орточку $x_{i_0}|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ назовем *дочерней орточкой* орточки $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$. Маршрут $x_0, e_1, x_1, \dots, e_{i_0}, x_{i_0}$ назовем *шагом* (*f-шагом*) с *началом* v и *концом* x_{i_0}; вершины $x_1, x_2, \dots, x_{i_0-1}$ называются *внутренними вершинами* этого шага. Из теоремы 18 следует, что в случае, когда f — ограниченная грань лабиринта L, то f-шаг с началом v и, следовательно, соответствующая дочерняя орточка орточки $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ всегда существуют.

Пусть L — конечный прямоугольный лабиринт, $v_1|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ — некоторая его $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точка, f_1 — грань лабиринта L, находящаясь слева от вектора $\overrightarrow{v_1(v_1\mathbf{s})}$. Если $f_1 \ne f_\infty(L)$, то пусть $v_2|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ — дочерняя орточка орточки $v_1|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$, а f_2 — грань, которая находится справа от вектора $\overrightarrow{v_2(v_2\mathbf{s})}$ (не исключаем случай, когда $f_2 = f_1$). Пусть $\rho_1 = \rho'_1$ — f_1-шаг с началом v_1 и с концом v_2. Если $f_2 \ne f_\infty(L)$, то пусть $v_3|_{\overleftarrow{\mathbf{n}}}$ — дочерняя орточка $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точки $v_2|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$, а f_3 — грань, которая находится справа от вектора $\overrightarrow{v_3(v_3\mathbf{s})}$. Пусть ρ'_2 — f_2-шаг с началом v_2 и с концом v_3 и пусть $\rho_2 = \rho_1 + \rho'_2$. Продолжаем эту процедуру очевидным образом до тех пор, пока для некоторого достаточно большого $k \ge 1$ орточка $v_{k+1}|_{\overleftarrow{\mathbf{s}}}$ не станет орточкой грани $f_\infty(L)$. Если такое k существует, то маршрут $\rho_k = \rho_{k-1} + \rho'_k$ называется *маршрутом свободы* из орточки $v_1|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$. Из определения ясно, что маршрутом свободы может быть и нуль-маршрут.

Введеные здесь понятия шага и маршрута свободы практически отвечают понятиям, которые в [15] названы соответственно регулярный взмах (regular swing) и регулярная волна (regular wave), и которые были впервые определены в [18]. Дадим новое доказательство теоремы, которая впервые была доказана в [18] в формулировке, несущественным образом отличающейся от данной ниже.

Теорема 19. *Если L — конечный прямоугольный лабиринт, то для любой $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точки $v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ лабиринта L существует маршрут свободы из нее.*

Доказательство. Будем свободно пользоваться выше данными обозначениями не меняя их смысла. Предположим противное — предположим, что вышеописанная процедура никогда не заканчивается. Маршрут ρ'_i назовем i-шагом (из орточки $v_1|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}} = v|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$) для любого $i \ge 1$. Через y_i и z_i обозначим, соответственно, начало и конец i-шага.

Очевидно, что существует минимальное $t_2 > 1$, для которого существует $t_1 \ge 1$ такое, что $t_1 < t_2$ и что конец t_2-шага тождественно равен началу t_1-шага. Через ρ обозначим замкнутый маршрут $\rho'_{t_1} + \dots + \rho'_{t_2}$. Если ρ является древовидным, то нетрудно удостовериться, что $[\rho] = (\mathbf{swne}^\lambda)_\circlearrowleft$, где $\lambda \ge 1$. С другой стороны, поскольку

$$[\rho] = [\upharpoonleft \mathbf{sensen} \dots \mathbf{sen} \downharpoonleft^\circ]_\circlearrowleft = \mathbf{se}_\circlearrowleft,$$

этот случай невозможен. Таким образом, можем предположить, что ρ не является древовидным. Покажем, что ρ является квазипростым контуром.

Пусть $\rho = x_0, e_1, x_1, \ldots, e_n, x_n$; здесь $x_0 = y_{t_1} = z_{t_2} = x_n$. Предположим, что маршрут ρ не является квазипростым контуром. Тогда существует $4 \leq j < n$ такое, что j является первым таким числом среди чисел $\overline{4, n-1}$, для которого существует $0 \leq i < j$ такое, что пара (x_i, x_j) является самопересечением и часть $\varepsilon = x_i, e_{i+1}, x_{i+1}, \ldots, e_j, x_j$ маршрута ρ является квазипростым контуром. Пусть x_i принадлежит m_1-шагу, а x_j принадлежит m_2-шагу, и пусть $x_{i'} = y_{m_1}$, $x_{i''} = z_{m_1}$, $x_{j'} = y_{m_2}$ и $x_{j''} = z_{m_2}$. Нетрудно убедиться, что достаточно рассмотреть следующие два случая (рис. 12):

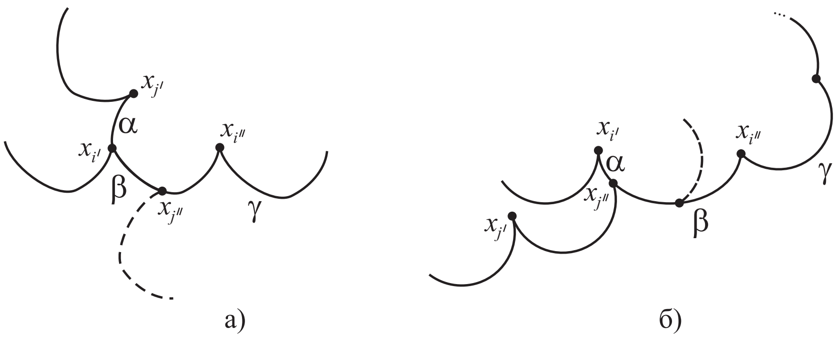


Рис. 12.

1) x_j является внутренней вершиной m_2-шага, $x_i = x_{i'}$ является началом m_1-шага (см. рис. 12 а)), $\alpha_{x_i}(x_{i+_n1}, x_{i-_n1}, x_{j-_n1}) < 0$, а также существует $m \geq 1$ такое, что $x_{j+n} = x_{i+n}$ для любого $1 \leq n \leq m$, вершина x_{j+m} является внутренней вершиной m_1-шага и $x_{j+m} = x_{j''}$.

Пусть $\alpha = |x_{j'}, e_{j'+1}, \ldots, e_j, x_j|$, $\beta = |x_i, e_{i+1}, \ldots, e_{i+m}, x_{i+m}|$ и $\gamma = |x_{i+m}, e_{i+m+1}, \ldots, e_{j''}, x_{j''}|$. Заметим, что замкнутый маршрут

$$x_{i+m}, e_{i+m+1}, \ldots, e_{j''}, x_{j''}$$

является квазипростым контуром. Возможны два подслучая.

Предположим сначала, что $[\rceil\gamma\lfloor^\circ] = \mathbf{swne} \,|\, \mathbf{eswn} \,|\, \mathbf{neswn} \,|\, \mathbf{wneswn}$ (заметим, что $\mathrm{l}(\gamma) = \mathbf{n}$); здесь с помощью символа $|$ разделяем все возможные значения для $[\rceil\gamma\lfloor^\circ]$. Поскольку $[\rceil\beta\gamma\lfloor^\circ] = \mathbf{se}$ и $\mathrm{f}(\beta) = \mathbf{s}$, то $[\rceil\beta\lfloor] = \mathbf{sen}\ldots$ Отсюда следует, что m_1-шаг короче, чем предполагалось, и мы получаем противоречие.

Предположим сейчас, что $[\rceil\gamma\lfloor^\circ] = \mathbf{wsen} \,|\, \mathbf{senwse} \,|\, \mathbf{enwsen} \,|\, \mathbf{nwsen}$. Поскольку $[\rceil\beta\gamma\lfloor^\circ] = \mathbf{se}$, $\mathrm{f}(\beta) = \mathbf{s}$ и $\mathrm{l}(\beta) = \mathbf{n}$, то $[\rceil\beta\lfloor] = \mathbf{swn}$, и, следственно, $[\rceil\alpha\lfloor] = \mathbf{sen}\ldots$, так как $[\rceil\alpha\beta\lfloor] = \mathbf{sen}$. Отсюда следует, что m_2-шаг короче, чем предполагалось, и мы получаем противоречие.

2) $x_j = x_{j''}$ и x_i является внутренней вершиной m_1-шага (см. рис. 12 б)) и $\alpha_{x_i}(x_{i+_n 1}, x_{i-_n 1}, x_{j-_n 1}) > 0$. Очевидно, что существует $m \geq 1$ такое, что $x_{j+n} = x_{i+n}$ для любого $1 \leq n \leq m$, и или $x_{j+m} = z_{m_2+k_0}$ и вершина x_{i+m} является внутренней вершиной m_1-шага, или $x_{i+m} = x_{i''}$ и вершина x_{j+m} является внутренней вершиной (m_2+k_0)-шага. Пусть $\alpha = |x_{i'}, e_{i'+1}, \ldots, e_i, x_i|$, $\beta = |x_i, e_{i+1}, \ldots, e_{i''}, x_{i''}|$ и $\gamma = |x_i, e_{i+1}, \ldots, e_j, x_j|$. Возможны следующие случаи.

Предположим сначала, что $[\upharpoonleft\gamma\downharpoonleft^\circ] = \mathbf{swne}$ (заметим, что $\mathrm{f}(\gamma) = \mathbf{s}$ и $\mathrm{l}(\gamma) = \mathbf{n}$). Поскольку $[\upharpoonleft\alpha\gamma\downharpoonleft^\circ] = \mathbf{se}$ и $\mathrm{f}(\alpha) = \mathbf{s}$, то $[\upharpoonleft\alpha\downharpoonleft] = \mathbf{sen}\ldots$ Следовательно, m_1-шаг короче, чем предполагалось, и мы получаем противоречие.

Предположим сейчас, что $[\upharpoonleft\gamma\downharpoonleft^\circ] = \mathbf{senwse}$. Поскольку $[\upharpoonleft\alpha\gamma\downharpoonleft^\circ] = \mathbf{se}$ и $\mathrm{f}(\alpha) = \mathbf{s}$, то $[\upharpoonleft\alpha\downharpoonleft] = \mathbf{swn}\ldots$, и, следственно, $[\upharpoonleft\beta\downharpoonleft] = \mathbf{senw}\ldots$, так как $[\upharpoonleft\alpha\beta\downharpoonleft] = \mathbf{sen}$ (заметим, что $\mathrm{f}(\beta) = \mathbf{s}$). Отсюда следует, что $x_{j+m} = z_{m_2+k_0}$ и вершина x_{i+m} является внутренней вершиной m_1-шага. Но тогда $|e_{j+m+1}| = \mathbf{s}$ и $|e_{i+m+1}| \neq \mathbf{s}$, и пара (x_i, x_j) не является самопересечением.

Значит, в любом случае получаем, что (x_i, x_j) не является самопересечением. Из полученного противоречия следует, что маршрут ρ является квазипростым контуром. Из теорем 14 и 16 получаем, что $[\rho] = \mathbf{enws}_{\circlearrowleft} \,|\, \mathbf{eswn}_{\circlearrowleft}$. Поскольку это невозможно, то теорема верна. $\square$

Пусть L - прямоугольный лабиринт, f — некоторая его грань и

$$\rho = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \ldots, e_n, x_n$$

— $\circlearrowleft$-граница [расширенная $\circlearrowleft$-граница] грани f. Также положим, что в текущий момент автомат $\mathfrak{A}$ находится в орточке [виртуальной орточке] $(x_i, \overleftarrow{e_i})$ грани f; $1 \leq i \leq n$. Заметим, что в действительности это значит, что автомат находится в вершине лабиринта L, которая является носителем [реальным носителем] данной орточки [виртуальной орточки]. Автомат $\mathfrak{A}$ *передвигается вперед* вдоль ρ на одну позицию, если в следующий момент он оказывается в орточке [виртуальной орточке] $(x_{i+_n 1}, \overleftarrow{e_{i+_n 1}})$. Автомат $\mathfrak{A}$ *передвигается назад* вдоль ρ на одну позицию, если в следующий момент он оказывается в орточке [виртуальной орточке] $(x_{i-_n 1}, \overleftarrow{e_{i-_n 1}})$. *Следующей орточкой* [*виртуальной орточкой*] относительно орточки [виртуальной орточки] $(x_i, \overleftarrow{e_i})$ грани f является орточка [виртуальная орточка] $(x_{i+_n 1}, \overleftarrow{e_{i+_n 1}})$.

Наша главная задача сейчас — построить коллектив автоматов, который из любой $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точки любой внутренней грани любого конечного прямоугольного лабиринта L, двигаясь по маршруту свободы этой орточки, выходит на границу грани $f_\infty(L)$ (т.е. все автоматы этого коллектива в некоторый момент оказываются в некоторой $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точке грани $f_\infty(L)$).

Чтобы это сделать, построим сначала коллектив $\mathcal{B}_1 = (\mathfrak{A}_1 \,|\, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, задача которого — организовать работу своеобразного счетчика C, назначение которого объясним ниже. В нем будет храниться неотрицательное число, представленное как "расстояние" между камнями $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ вдоль расширенной $\circlearrowleft$-границы текущей грани f данного лабиринта L. Иными словами, число, хранящееся в C в текущий момент, есть число $|\hat{\alpha}_f(v(\mathfrak{K}_1)|_{\overrightarrow{\omega_1}}, v(\mathfrak{K}_2)|_{\overleftarrow{\omega_2}})|$, где для любого $1 \le i \le 2$ через $v(\mathfrak{K}_i)|_{\overrightarrow{\omega_i}}$ обозначаем виртуальную орточку грани f, в которой в текущий момент оказался камень $\mathfrak{K}_i$. Коллектив $\mathcal{B}_1$ передвигает счетчик C вперед вдоль расширенной $\circlearrowleft$-границы грани f, а также увеличивает или уменьшает его значения на 1, когда это требуется "режимом" работы этого коллектива (режим определяется значением целочисленной переменной r).

Опишем программу, по которой "работает" коллектив $\mathcal{B}_1$ в любом конечном прямоугольном лабиринте L. Местом нахождения (*базовой точкой*) счетчика C считаем виртуальную точку грани f, в которой находится камень $\mathfrak{K}_1$. Положим, что в начальный момент имеет место $-1 \le r \le 1$, и при этом: счетчик C передвигается и уменьшается на 1, если $r = -1$; счетчик C только передвигается, если $r = 0$; счетчик C передвигается и увеличивается на 1, если $r = 1$. Также положим, что в начальный момент автомат $\mathfrak{A}_1$ и камень $\mathfrak{K}_1$ находятся в одной и той же виртуальной орточке некоторой грани f лабиринта L. Конец выполнения программы отмечаем присвоением переменной r значения -2. Выполнив некоторый шаг программы, коллектив $\mathcal{B}_1$ всегда переходит к следующему шагу, если не сказано иначе. Тогда выполняем следующие шаги (программа Π_1):

1: Если $C = 0$ (все автоматы коллектива $\mathcal{B}_1$ находятся в одной и той же виртуальной орточке грани f), то автомат $\mathfrak{A}_1$ передвигает оба камня вдоль расширенной $\circlearrowleft$-границы грани f на одну позицию вперед.

2: Если $r = 0$ (счетчик C только передвигается), то процедура заканчивается ($r := -2$); в противном случае, если $r = 1$ (счетчик C передвигается и увеличивается на 1), то автомат $\mathfrak{A}_1$ передвигает только камень $\mathfrak{K}_2$ вдоль расширенной $\circlearrowleft$-границы грани f на одну позицию вперед.

3: Если все автоматы коллектива $\mathcal{B}_1$ оказались в одной и той же вершине, то $r := -2$, а если нет, то автомат $\mathfrak{A}_1$ передвигается вдоль $\circlearrowleft$-границы грани f на одну позицию назад и $r := -2$.

4: Если $C \ne 0$, то автомат $\mathfrak{A}_1$ передвигает камень $\mathfrak{K}_1$ на одну позицию вперед вдоль расширенной $\circlearrowleft$-границы грани f; если $r = -1$, то $r := -2$.

5: Автомат $\mathfrak{A}_1$ проверяет, находится ли камень $\mathfrak{K}_2$ в текущей вершине (в вершине, в которой он оказался в данный момент) грани f; если нет, он переходит к следующему шагу программы, а если да, то переходит к шагу 7.

6: Автомат $\mathfrak{A}_1$ передвигается на одну позицию вперед вдоль $\circlearrowleft$- границы грани f и переходит к шагу 5.

7: Если $r = 0$, то автомат $\mathfrak{A}_1$ передвигает камень $\mathfrak{K}_2$ на одну позицию вперед вдоль расширенной $\circlearrowleft$- границы грани f; если $r = 1$, то автомат $\mathfrak{A}_1$ передвигает камень $\mathfrak{K}_2$ два раза подряд на одну позицию вперед вдоль расширенной $\circlearrowleft$- границы грани f.

8: Автомат $\mathfrak{A}_1$ проверяет, находится ли камень $\mathfrak{K}_1$ в вершине, в которой он оказался; если нет, он переходит к шагу 9, а если да, то $r = -2$.

9: Автомат $\mathfrak{A}$ передвигается на одну позицию назад вдоль $\circlearrowleft$- границы грани f и переходит к шагу 8.

Опишем сейчас более подробно коллектив $\mathcal{B}_1 = (\mathfrak{A}_1 \,|\, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$. Сначала введем некоторые новые обозначения.

Для любого $\omega \in \mathfrak{D}$ и $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$ пусть $\upsilon^*(\omega, a) = \alpha^*(\omega, a) = (\overline{\omega})^-(a)$, если $a \neq \{\overline{\omega}\}$, и пусть $\upsilon^*(\omega, a) = \omega^-(\mathfrak{D})$ и $\alpha^*(\omega, a) = \mathbf{0}$, если $a = \{\overline{\omega}\}$. Смысл данных обозначений состоит в следующем. Если $(x, \overleftarrow{\omega_x})$ — некоторая виртуальная орточка грани f, то пара $(x\alpha^*(\omega_x, [x]), \upsilon^*(\omega_x, [x]))$ является следующей виртуальной орточкой вдоль расширенной $\circlearrowleft$- границы грани f относительно $(x, \overleftarrow{\omega_x})$.

Также, для любого $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$ пусть $\vartheta(a) = \{\overline{\omega} \,|\, \omega \in a\}$, если $|a| > 1$, и пусть $\vartheta(a) = \{\overline{\omega}, (\overline{\omega})^-(\mathfrak{D})\}$, если $a = \{\omega\}$ для некоторого $\omega \in \mathfrak{D}$. Смысл данного обозначения состоит в следующем. Если L — прямоугольный лабиринт, x — некоторая его вершина, и если $\omega \in \vartheta([x])$ для некоторого $\omega \in \mathfrak{D}$, то пара $(x, \overleftarrow{\omega})$ является виртуальной орточкой грани f, где f грань лабиринта L, которая находится слева от вектора $\overrightarrow{x(x(\overline{\omega})^-([x]))}$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1 \,|\, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_s)$ — коллектив автоматов типа $(1, s)$. Обозначим через $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{K}_{j_k}){-}\omega{\rightarrow}$, где $\omega \in \mathfrak{D} \cup \{\mathbf{0}\}$ и $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq s$, тот факт, что в данный момент в данном лабиринте L автомат $\mathfrak{A}_1$ находится в текущей вершине x хотя бы с камнями $\mathfrak{K}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{K}_{j_k}$, и в следующий момент оказывается в вершине $x\omega$, передвигая в эту вершину только камни $\mathfrak{K}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{K}_{j_k}$ (если $\omega = \mathbf{0}$, то в действительности $\mathfrak{A}_1$ остается на месте и ни один камень не передвигает). Если $\omega \in \mathfrak{D}$ и $\mathfrak{A}_1$ переходит из вершины x в вершину $x\omega$ и при этом не передвигает ни один из камней, находящихся в x, то пишем только $\mathfrak{A}_1{-}\omega{\rightarrow}$.

Если в текущий момент в вершине x лабиринта L оказались только автомат $\mathfrak{A}_1$ и камни $\mathfrak{K}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{K}_{j_k}$, где $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq s$, то этот факт обозначим через $\mathfrak{A}_1{\leftrightarrow}\mathfrak{K}_{j_1}{\leftrightarrow}\ldots{\leftrightarrow}\mathfrak{K}_{j_k}$. Если в текущий момент в вершине x лабиринта L, в которой оказался автомат $\mathfrak{A}_1$, не находится камень $\mathfrak{K}_i$ ($1 \leq i \leq s$), то этот факт обозначим через $\mathfrak{A}_1{\not\leftrightarrow}\mathfrak{K}_i$.

Память автомата $\mathfrak{A}_1$ дана в виде "регистра" $(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3, \hat{r})$, где переменные $\hat{\omega}_i$, $1 \leq i \leq 3$, принимают любые значения из множества $\mathfrak{D}$, а переменная $\hat{r}$ — любое значение из множества $\overline{-3, 7}$. Значения переменной $\hat{r}$ определяют режим работы данного коллектива и, кроме значения -3, имеют описанный выше смысл. Через $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$ обозначим автомат $\mathfrak{A}_1$, у которого $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$ — значение "регистра" памяти, т.е. автомат $\mathfrak{A}_1$, у которого состояние $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$. Состояние $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$ "говорит" автомату $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$, что камень $\mathfrak{K}_1$ находится в виртуальной $\overleftarrow{\omega_1}$-точке текущей грани f, а камень $\mathfrak{K}_2$ — в виртуальной $\overleftarrow{\omega_2}$-точке этой же грани. Начальным состоянием автомата $\mathfrak{A}_1$ является упорядоченный набор $(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3)$.

Тогда, если на вход автомата $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$ поступает входной символ $a \in \mathcal{P}_0(\mathfrak{D})$, "реакция" коллектива "вычисляется" с помощью следующих правил (выполняется то правило из ниже данных, для которого удовлетворено условие для применения):

1) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) = (\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3)$ и $\mathbf{s} \in a$, то $\hat{\omega}_1 := \hat{\omega}_2 := \hat{\omega}_3 := \upsilon^*(\omega_1, a)$, $\hat{r} := -2$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2) - \mathbf{s} \rightarrow$.

2) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $r = 0$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_1 := \hat{\omega}_2 := \upsilon^*(\omega_1, a)$, $\hat{r} := -2$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.

3) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $r = 1$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_1 := \hat{\omega}_2 := \upsilon^*(\omega_1, a)$, $\hat{r} := 5$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.

4) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $r = 5$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_2 := \hat{\omega}_3 := \upsilon^*(\omega_1, a)$, $\hat{r} = 6$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.

5) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$ и $r = 6$, то $\hat{r} = -2$.

6) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $r = 6$ и $\omega_3 \in \vartheta(a)$, то $\hat{r} = -2$ и $\mathfrak{A}_1 - \overline{\omega}_3 \rightarrow$.

7) Если или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1$, или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$, и если $r = -1$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_1 := \upsilon^*(\omega_1, a)$ и $\hat{r} := -2$, а также, $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.

8) Если или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1$, или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$, и если $r = 0$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_1 := \hat{\omega}_3 := \upsilon^*(\omega_1, a)$ и $\hat{r} := 3$, а также, $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.

9) Если или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1$, или $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1 \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$, и если $r = 1$ и $\omega_1 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_1 := \hat{\omega}_3 := \upsilon^*(\omega_1, a)$ и $\hat{r} := 4$, а также, $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_1) - \alpha^*(\omega_1, a) \rightarrow$.

10) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \not\leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, и если $3 \leq r \leq 4$ и $\omega_3 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_3 := (\overline{\omega}_3)^-(a)$ и $\mathfrak{A}_1 - (\overline{\omega}_3)^-(a) \rightarrow$.

11) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $r = 3$ и $\omega_2 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_2 := \upsilon^*(\omega_2, a)$, $\hat{\omega}_3 := \sigma_-(\upsilon^*(\omega_2, a))$, $\hat{r} := 2$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_2, a) \rightarrow$.

12) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $r = 4$ и $\omega_2 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_2 := \upsilon^*(\omega_2, a)$, $\hat{r} := 7$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_2, a) \rightarrow$.

13) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_2$, $r = 7$ и $\omega_2 \in \vartheta(a)$, то $\hat{\omega}_2 := \upsilon^*(\omega_2, a)$, $\hat{\omega}_3 := \sigma_-(\upsilon^*(\omega_2, a))$, $\hat{r} := 2$ и $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{K}_2) - \alpha^*(\omega_2, a) \rightarrow$.

14) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \leftrightarrow \mathfrak{K}_1$ и $\hat{r} := 2$, то $\hat{r} := -2$.

15) Если $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \not\leftrightarrow \mathfrak{K}_1$ и если при этом $\hat{r} := 2$, то $\hat{\omega}_3 := (\overline{\omega}_3)^+(a)$ и $\mathfrak{A}_1 - (\overline{\omega}_3)^+(a) \rightarrow$.

16) Во всех остальных случаях коллектив $\mathcal{B}_1$ определен тривиальным способом.

Нетрудно убедиться, что если в начальный момент времени автомат $\mathfrak{A}_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$ вместе с камнем $\mathfrak{K}_1$ помещен в произвольную виртуальную орточку $(x_0, \overleftarrow{\omega_1})$, а камень $\mathfrak{K}_2$ — в произвольную виртуальную орточку $(y_0, \overleftarrow{\omega_2})$ некоторой грани f некоторого прямоугольного лабиринта L, то коллектив $\mathcal{B}_1$ будет вести себя по выше данной программе Π_1.

Пусть α — произвольное слово из $\mathfrak{D}^+$ такое, что $\mathrm{f}(\alpha) = \mathbf{s}$. Также, пусть $\rceil\alpha\lfloor = \omega_1\omega_2 \dots \omega_n$, и пусть $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k < n$ — все числа такие, что $\omega_{i_j} = \mathbf{s}$ для любого $1 \le j \le k$. Далее, пусть $\delta^{(-1)} = \mathbf{swnes}$, $\delta^{(0)} = \mathbf{s}$ и $\delta^{(+1)} = \mathbf{senws}$. Для любого $1 \le j < k$, пусть a_j — число такое, что $[\rceil\alpha\lfloor|_{i_j}^{i_{j+1}}] = \delta^{(a_j)}$. Подслово $\rceil\alpha\lfloor|_{i_j}^{i_{j+1}}$ слова $\rceil\alpha\lfloor$ называется *отрицательным* **s**-*витком*, *нулевым* **s**-*витком* или *положительным* **s**-*витком* слова α, если, соответственно, $[\rceil\alpha\lfloor|_{i_j}^{i_{j+1}}] = \delta^{(-1)}$, $[\rceil\alpha\lfloor|_{i_j}^{i_{j+1}}] = \delta^{(0)}$ или $[\rceil\alpha\lfloor|_{i_j}^{i_{j+1}}] = \delta^{(+1)}$. Обозначим через $a(\alpha)$ число $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$, если $k > 1$, и положим, что $a(\alpha) = 0$, если $k = 1$. Назовем число $a(\alpha)$ *алгебраической суммой* всех **s**-витков слова α. Нетрудно удостовериться, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 20. *Если α — произвольное слово из $\mathfrak{D}^+$ такое, что $\mathrm{f}(\alpha) = \mathbf{s}$ и $\mathrm{l}(\alpha) = \mathbf{n}$, то $a(\alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда $[\rceil\alpha\lfloor] = \mathbf{sen} \,|\, \mathbf{swn}$.*

Опишем теперь следующую процедуру. Входом для процедуры будет произвольное слово из $\mathfrak{D}^+$, начинающееся на букву **s**, а ее единственными переменными будут a, i и β. При этом, если $\alpha = \omega_1\omega_2 \dots \omega_n$, $n \ge 1$, — произвольное слово из $\mathfrak{D}^+$ такое, что $\omega_1 = \mathbf{s}$, то выполняем следующие шаги (программа Π_2):

1: Пусть $a := 0$, $i := 2$ и $\beta := \omega_1$. Если $i \le n$, то переходим к следующему шагу, а если нет, то останавливаемся (выход 1).

2: Если $\omega_i = [\mathrm{l}(\beta)]^{-1}$ и $\mathrm{l}(\beta) \ne \mathbf{e}$, то пусть $\beta := [\beta\sigma_-(\omega_i)]$ и переходим к шагу 4, а если нет, то переходим к следующему шагу.

3: Если $\omega_i = [\mathrm{l}(\beta)]^{-1}$ и $\mathrm{l}(\beta) = \mathbf{e}$, и если $b \in \overline{-1, 1}$ такое, что $[\beta\mathbf{s}] = \delta^{(b)}$, то $a := a + b$ и $\beta := \mathbf{s}$, и мы переходим к следующему шагу, а если нет, то сразу переходим к следующему шагу.

4: Если $\omega_i \ne \mathbf{s}$, то пусть $\beta := [\beta\omega_i]$ и $i := i + 1$, и переходим к шагу 6, а если нет, то переходим к следующему шагу.

5: Если $\omega_i = \mathbf{s}$ и $[\beta\mathbf{s}] = \delta^{(b)}$, где $-1 \le b \le 1$, то $a := a + b$, $\beta := \mathbf{s}$ и $i := i + 1$. Если $i \le n$, то переходим к шагу 2, а если нет, то останавливаемся (выход 1).

6: Если $a = 0$ и $\beta = \mathbf{sen}$, то останавливаемся (выход 2), а если $i > n$, то останавливаемся (выход 1); в противном случае переходим к шагу 2.

Благодаря шагам 2 и 3 данная процедура перерабатывает не слово α, а слово $\rceil\alpha\lfloor$. Нетрудно удостовериться, что заключительное значение переменной a есть значение $a(\rceil\omega_1\omega_2\dots\omega_{i-1}\lfloor)$. При этом, если процедура заканчивается через выход 1, то целое входное слово является "переработанным", а если через выход 2, то процедура "перерабатывает" только его часть, а именно слово $\omega_1\omega_2\dots\omega_i$, где i первое такое число среди чисел $\overline{1,n}$, для которого $\omega_i = \mathbf{n}$ и $[\rceil\omega_1\omega_2\dots\omega_i\lfloor] = \mathbf{sen}$.

Построим сейчас автомат $\mathfrak{A}_2$, который в сочетании с коллективом $\mathcal{B}_1$ будет выполнять программу Π_2 по отношению к любому слову α, которое соответствует, начинающейся с некоторой $\mathbf{s}$-точки, $\circlearrowleft$-границе некоторой внутренней грани f некоторого прямоугольного лабиринта L. Этот новый коллектив будет, по существу, перерабатывать любое такое "входное слово" α в слово $\rceil\alpha\lfloor$, соответствующее расширенной $\circlearrowleft$-границе сопряженной с $\circlearrowleft$-границей, определяющей слово α. Теперь роль автомата $\mathfrak{A}_2$ в этом сочетании состоит в том, чтобы реагировать на каждый очередной значимый $\mathbf{s}$-виток слова $\rceil\alpha\lfloor$: на выходе автомата $\mathfrak{A}_2$ "практически всегда" находится число 0, а если появляется число -1 [1], то только что "завершившийся" $\mathbf{s}$-виток был отрицательным [положительным], а роль коллектива $\mathcal{B}_1$, который управляет работой счетчика C, состоит в подсчете этих $\mathbf{s}$-витков. В нашей реализации C хранит значение, противоположное значению переменной a, т.е. всегда $C = -a$.

Опишем автомат $\mathfrak{A}_2$ более подробно. Состояниями автомата $\mathfrak{A}_2$ являются все элементы множества $W_4(\mathbf{s}) \cup \{\Lambda\}$, где

$$W_4(\mathbf{s}) = \{\alpha \in \mathrm{Sim}(\mathfrak{D}) \,|\, [\alpha] = \alpha, |\alpha| \le 4 \text{ и } \mathrm{f}(\alpha) = \mathbf{s}\},$$

его входом является любое $\omega \in \mathfrak{D}$, а выходом — любое число $b \in \overline{-1,+1}$. Тогда, если на вход автомата $\mathfrak{A}_2$ поступает входной символ $\omega \in \mathfrak{D}$, его "реакция вычисляется" с помощью следующих правил:

1) Если $\beta = \Lambda$ и $\omega = \mathbf{s}$, то $\beta := \mathbf{s}$ и $b := 0$.

2) Если $\beta = \Lambda$ и $\omega \ne \mathbf{s}$, то $\beta := \Lambda$ и $b := 0$.

3) Если $\beta \ne \Lambda$, $\omega = (\mathrm{l}(\beta))^{-1}$ и $\mathrm{l}(\beta) \ne \mathbf{e}$, то пусть $\beta := [\beta\sigma_-(\omega)]$ и $b := 0$.

4) Если $\beta \ne \Lambda$, $\omega = (\mathrm{l}(\beta))^{-1}$, $\mathrm{l}(\beta) = \mathbf{e}$ и $[\beta\mathbf{s}] = \delta^{(b')}\mathbf{s}$ для некоторого $-1 \le b' \le 1$, то пусть $\beta := \mathbf{s}$ и $b := b'$.

5) Если $\beta \ne \Lambda$, $\omega \ne (\mathrm{l}(\beta))^{-1}$ и $\omega \ne \mathbf{s}$, то пусть $\beta := [\beta\omega]$ и $b := 0$.

6) Если $\beta \ne \Lambda$, $\omega \ne (\mathrm{l}(\beta))^{-1}$, $\omega = \mathbf{s}$ и $[\beta\mathbf{s}] = \delta^{(b')}\mathbf{s}$ для некоторого $-1 \le b' \le 1$, то пусть $\beta := \mathbf{s}$ и $b := b'$.

Пусть $\mathcal{B}_1 = (\mathfrak{A}_1 \,|\, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$, где $\mathfrak{A}_1 = (Q_1, \varphi_1, \psi_1)$ и $\mathfrak{K}_i = (\hat{\psi}_i)$ для любого $1 \le i \le 2$, — описанный выше коллектив, и $\mathfrak{A}_2 = (A_2, Q_2, B_2, \varphi_2, \psi_2)$ —

описанный выше автомат. Построим новый коллектив $\mathcal{B}_2 = (\mathfrak{A}_3 \,|\, \mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}'_2)$ типа $(1,2)$, где $\mathfrak{A}_3 = (Q_3, \varphi_3, \psi_3)$ и $\mathfrak{K}_i = (\hat{\psi}'_i)$ для любого $1 \le i \le 2$, следующим образом. Множеством состояний автомата $\mathfrak{A}_3$ будет множество $Q_2 \times Q_1$, т.е. состояние автомата $\mathfrak{A}_3$ есть любая 5-ка $(\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r)$, где $\beta \in W_4(\mathbf{s}) \cup \{\Lambda\}$, значения ω_i, $1 \le i \le 3$, являются любыми элементами множества $\mathfrak{D}$, а r является любым числом из множества $\overline{-3,7}$. Положим, что начальное состояние коллектива $\mathcal{B}_2$ будет 5-ка $(\Lambda; \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3)$. Далее положим, что для любых $(\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r) \in Q_3$ и $(a, 0, \alpha_1, \alpha_2) \in A_{\mathfrak{A}_3}$ имеет место:

1) $\varphi_3((\Lambda; \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) = (\mathbf{s}; \mathbf{s}, \mathbf{s}, \mathbf{s}, -2)$,
$\psi_3((\Lambda; \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) = \mathbf{s}$
и
$\hat{\psi}'_1((a, (\Lambda; \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3), 0, \alpha_2)) = \hat{\psi}'_2((a, (\Lambda; \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, -3), \alpha_1, 0)) = \mathbf{s}$,
если $\mathbf{s} \in a$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$;

2) $\varphi_3((\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) =$
$= (\beta; \varphi_1((\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)))$
и
$\psi_3((\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) = \psi_1((\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2))$,
а также

$$\hat{\psi}'_1((a, (\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), 0, \alpha_2)) = \hat{\psi}_1((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), 0, \alpha_2))$$

и

$$\hat{\psi}'_2((a, (\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), \alpha_1, 0)) = \hat{\psi}_2((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), \alpha_1, 0)),$$

если $r \neq -2$ и $r \neq -3$ (другими словами, до тех пор, пока условие $r \neq -2$ выполнено, и при этом коллектив $\mathcal{B}_2$ не находится в начальном состоянии, то он ведет себя как коллектив $\mathcal{B}_1$);

3) $\varphi_3((\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) = (\varphi_2(\beta, (\overline{\omega}_1)^-(a));$
$\varphi_1((\omega_1, \omega_2, \omega_3, -\psi_2(\beta, (\overline{\omega}_1)^-(a))), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)))$,
и
$\psi_3((\beta; \omega_1, \omega_2, \omega_3, r), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2)) =$
$= \psi_1((\omega_1, \omega_2, \omega_3, -\psi_2(\beta, (\overline{\omega}_1)^-(a))), (a, 0, \alpha_1, \alpha_2))$,
а также
$\hat{\psi}'_1((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), 0, \alpha_2)) =$
$= \hat{\psi}_1((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, -\psi_2(\beta, (\overline{\omega}_1)^-(a))), 0, \alpha_2))$
и
$\hat{\psi}'_2((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, r), \alpha_1, 0)) =$
$= \hat{\psi}_2((a, (\omega_1, \omega_2, \omega_3, -\psi_2(\beta, (\overline{\omega}_1)^-(a))), \alpha_1, 0))$,
если $r = -2$ и $\alpha_1 = 1$ (в тот момент, когда выполнено условие

$r = -2$, сначала, с помощью программы автомата $\mathfrak{A}_2$, определяется основной режим работы, т.е. какое значение из множества $\overline{-1, 1}$ принимает переменная $\hat{r}$, а потом коллектив $\mathcal{B}_2$ делает “ход” как коллектив $\mathcal{B}_1$);

4) переход автомата $\mathfrak{A}_3$ в финишное состояние q^*, если $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta = \mathbf{sen}$, $\omega_1 = \omega_2 = \mathbf{n}$ и $r = -2$;

5) во всех остальных случаях коллектив $\mathcal{B}_2$ определен тривиальным способом.

(конечно, описывая выше коллектив $\mathcal{B}_2$, мы как всегда подразумеваем, что любой камень этого коллектива всегда остается на месте, если в вершине, в которой он находится, нет автомата $\mathfrak{A}_3$).

Предположим сейчас, что в начальный момент коллектив $\mathcal{B}_2$ помещен в некоторую орточку $x|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ некоторой внутренней грани f произвольного прямоугольного лабиринта L (все автоматы коллектива $\mathcal{B}_2$ помещены в вершину x лабиринта L). Из определения коллектива $\mathcal{B}_2$, следует, что базовая точка счетчика C за время между двумя последующими моментами, в которых выполнено условие $r = -2$, передвигается на одну позицию вперед вдоль расширенной $\circlearrowleft$ - границы грани f, начиная с виртуальной орточки $x|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ грани f. Также из определения и теоремы 18 следует, что коллектив $\mathcal{B}_2$ переходит обязательно в финишное состояние и что тогда все автоматы этого коллектива оказываются в дочерней орточке орточки $x|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$. Заметим, что всегда $C = -a$, где a — алгебраическая сумма всех $\mathbf{s}$-витков подслова слова, которое соответствует расширенной $\circlearrowleft$ - границе грани f: от виртуальной орточки $x|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ до виртуальной орточки этой же грани, в которой оказалась в данный момент базовая точка счетчика C. Из теоремы 18 следует, что число $-a$, хранящееся в C, всегда ≥ 0.

Значит, назначение коллектива $\mathcal{B}_2$ следующее: найти дочернюю орточку данной орточки $x|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$ данной внутренней грани f данного конечного прямоугольного лабиринта L. Можно показать, подобно тому как мы это сделали выше, что существует и коллектив типа $(2, 0)$, который справляется с этой задачей.

Обозначим через $\mathcal{B}_3$ коллектив автоматов типа $(1, 2)$, который в любом конечном прямоугольном лабиринте L_{x_0} проверяет условие $x_0 \in b(f_\infty(L))$. Нетрудно убедиться, что существуют коллективы автоматов как типа $(2, 0)$, так и типа $(1, 1)$, которые справляются с этой задачей.

Обозначим через $\mathcal{B}_4$ коллектив автоматов типа $(1, 2)$, который в любом конечном прямоугольном лабиринте L_{x_0} для грани f, находящейся в L слева от вектора $\overrightarrow{x_0(x_0\omega)}$, где $\omega = \mathbf{e}^-([x_0])$, находит первую $\overleftarrow{\mathbf{n}}$-точку грани f, которая находится вдоль $\circlearrowleft$ - границы грани f после ее орточки $x_0|_{\overrightarrow{\omega}}$, Легко убедиться, что с этой задачей справляется даже один автомат.

Пусть L_{x_0} — произвольный конечный прямоугольный лабиринт такой, что $x_0 \in b(f_\infty(L))$. Обозначим через $\mathcal{B}_5 = (\mathfrak{A}_5 \,|\, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2)$ коллектив автоматов типа $(1, 2)$, который в L_{x_0} ведет себя следующим образом: камни $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ остаются все время в вершине x_0, а автомат $\mathfrak{A}_5$ за каждый момент времени передвигается на одну позицию вперед вдоль $\circlearrowleft$-границы грани $f_\infty(L)$. Подобное поведение коллектива в таком лабиринте можно осуществить и с помощью коллектива типа $(2, 0)$, а именно: один из автоматов такого коллектива остается в вершине x_0, а второй ведет себя как автомат $\mathfrak{A}_5$.

Теорема 21. *Пусть $\mathfrak{L}$ — класс всех конечных прямоугольных лабиринтов. Тогда сложность предикатов $\mathbf{M}^1_\mathfrak{L}$ и $\mathbf{M}^2_\mathfrak{L}$ в точке* $(1, 2)$ $[(2, 0)]$ *есть* $O(n^3)$ $[O(n^2)]$.

Доказательство. Очевидно, что утверждение верно, если оно верно для предиката $\mathbf{M}^2_\mathfrak{L}$. Покажем, что утверждение для этого предиката в точке $(1, 2)$ верно (аналогичным образом разбирается и случай предиката $\mathbf{M}^2_\mathfrak{L}$ в точке $(2, 0)$).

Рассмотрим комбинирующую диаграмму $\mathbb{D}$, данную на рис. 13, где коллективы $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_4$ и $\mathcal{B}_5$ являются только что определенными коллективами, а $\mathcal{B}'_3$ — коллектив изоморфный $\mathcal{B}_3$. Значения меток диаграммы $\mathbb{D}$ будут следовать неявно из ниже данного описания.

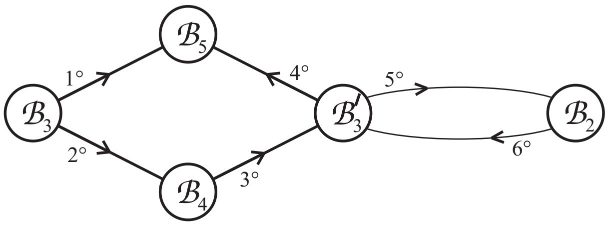


Рис. 13.

Определим коллектив $\mathcal{A}$ как $\mathbb{D}$-композицию данных коллективов автоматов; в качестве начального состояния коллектива $\mathcal{A}$ выберем начальное состояние коллектива $\mathcal{B}_4$. Коллектив $\mathcal{A}$ будет "вести себя" в произвольном конечном прямоугольном лабиринте L_{x_0} в соответствии со следующей программой:

1: Коллектив $\mathcal{A}$ работает по программе коллектива $\mathcal{B}_3$, а именно проверяет, принадлежит или нет вершина x_0 границе грани $f_\infty(L)$: если да, то переходит к шагу 5 (переход 1°), а если нет переходит к следующему шагу (переход 2°).

2: Коллектив $\mathcal{A}$ работает по программе коллектива $\mathcal{B}_4$, а именно в L_{x_0} находит первую $\overleftarrow{\mathbf{n}}$-точку грани f, которая находится вдоль $\circlearrowleft$-границы грани f после ее орточки $x_0|_{\overrightarrow{\omega}}$, где $\omega = \mathbf{e}^-([x_0])$ и f — грань лабиринта L находящаясь слева от вектора $\overrightarrow{x_0(x_0\omega)}$. Обозначим через x носитель этой орточки (x будет единственной “переменной” для программы). Коллектив $\mathcal{A}$ переходит к следующему шагу (переход 3°).

3: Коллектив $\mathcal{A}$ работает по программе коллектива $\mathcal{B}'_3$, а именно проверяет, принадлежит или нет вершина x границе грани $f_\infty(L)$: если да, то переходит к шагу 5 (переход 4°), а если нет переходит к следующему шагу (переход 5°).

4: Коллектив $\mathcal{A}$ работает по программе коллектива $\mathcal{B}_2$, т.е. находит дочернюю орточку для $x|_{\overrightarrow{\mathbf{s}}}$, берет ее носитель как новое значение для x, и переходит к шагу 3 (переход 6°).

5: Коллектив $\mathcal{A}$ работает по программе коллектива $\mathcal{B}_5$, т.е. ведет себя следующим образом: оба камня $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ “покоятся” все время в вершине x, а автомат $\mathfrak{A}_5$ “непрерывно” двигается вперед вдоль $\circlearrowleft$-границы грани $f_\infty(L)$.

Теперь нетрудно убедиться, что если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — две копии коллектива $\mathcal{A}$, L — произвольный конечный прямоугольный лабиринт, и x_0 и y_0, $x_0 \neq y_0$, — две прозвольные его вершины, то пара $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ имеет (x_0, y_0)-встречу в L. Следовательно, $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}(1,2) = 1$.

Данная в теореме оценка сложности предиката $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$ в точке $(1,2)$ следует из факта, что для любой грани f лабиринта L число $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точек грани f не более, чем $|b(f)|$, а чтобы найти дочернюю орточку любой $\overrightarrow{\mathbf{s}}$-точки грани f коллектив $\mathcal{A}_2$ “тратит” не более, чем $3|b(f)|^2$ моментов времени. □

Напомним, что в основе алгоритма обхода конечных прямоугольных лабиринтов ([15]) лежит теорема 19 (впервые доказанная в [18]) и изложенный в [18] алгоритм выхода автомата (в широком понимании этого слова) из любой внутренней вершины любого конечного прямоугольного лабиринта на границу его внешней грани. Таким образом коллектив автоматов, даже по алгоритму, изложенному в [15], оказывается значительно быстрее на границе внешней грани данного конечного прямоугольного лабиринта, чем это кажется на первый взгляд. Но не вдаваясь в подробности алгоритма обхода конечных прямоугольных лабиринтов из [15], и используя теорему 19, мы доказали теорему 21 и достигли нами обозначеную цель.

В заключение заметим, что проблема описания предикатов $\mathbf{M}^0_{\mathfrak{L}}$, $\mathbf{M}^1_{\mathfrak{L}}$ и $\mathbf{M}^2_{\mathfrak{L}}$, когда $\mathfrak{L}$ является классом всех прямоугольных лабиринтов, остается полностью открытой.

Список литературы

[1] Kudryavtsev V.B., Ušćumlić Š.M., Kilibarda G., "On behaviour of automata in labyrinths", *Discrete Math. Appl.*, **3**:1 (1993), 1–28.

[2] Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ущчумлич Ш.М., "Системы автоматов в лабиринтах", Математические вопросы кибернетики, **14**, ed. Лупанов О.Б, Физматлит, Москва, 2005, 93–160.

[3] Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Ušćumlić Š.M., "Collectives of automata in labyrinths", *Discrete Math. Appl.*, **13**:5 (2003), 429–466.

[4] Budach L., "Automata and labirinths", *Math. Nachrichten*, **86** (1978), 195–282.

[5] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ущчумлич Ш.М., *Введение в теорию абстрактных автоматов*, Изд-во МГУ, Москва, 1985.

[6] Hoffmann F., "One pebble does not suffice to search plane labyrinths", Lecture Notes in Computer Science, **117**, 1981, 433-444.

[7] Hoffman F., *1-Kiesel-Automaten in Labyrinthen*, Report R-Math-06/82, AdW der DDR, Berlin, 1982.

[8] Килибарда Г., "Об обходе конечных лабиринтов системами автоматов", *Дискретная математика*, **2**:2 (1990), 71–81.

[9] Blum M., Kozen D., "On the power of the compass", Proc. 19th IEEE FOCS Conf. (Ann Arbor), 1978, 132–142.

[10] Pultr A., Úlehla J., "On two problems of mice", *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, **31**:2 (1982), 249–262.

[11] Szepietowski A., "A finite 5-pebble-automaton can search every maze", *Information Processing Letters*, **15**:5 (1982), 199-204.

[12] Kilibarda G., "On the minimum universal collectives of automata for plane labyrinths", *Discrete Math. Appl.*, **3**:6 (1993), 555–586.

[13] Kilibarda G., "On Reduction of Automata in Labyrinths", *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.*, **101 (115)** (2017), 47–63.

[14] Hemmerling A., "Normed two-plane traps for finite systems of cooperating compass automata", *J. Inf. Process. Cybern.: EIK*, **28**:8/9 (1987), 453–470.

[15] Hemmerling, A., "Remark on the power of compas", *Lecture Notes in Computer Science*, **233** (1986), 405–413.

[16] Vijayan G., Wigderson A., "Rectilinear graphs and their embeddings"', *SIAM J. Comput.*, **14** (1985), 355–372.

[17] Hoffman F., Kriegel K., *Quasiplane labyrinths*, Preprint P-Math-20/83, AdW der DDR, Berlin, 1983.

[18] Asser G., "Bemerkungen zum Labyrinth-Problem", *J. Inf. Process. Cybern.: EIK*, **13**:4/5 (1977), 203–216.

Type meeting problem for automata in labyrinths

Kilibarda G.

The paper studies one special type of interaction of automata collectives in labyrinths. The following problem is considered for a given class of labyrinths: for which pairs of collective types there is a collective of the first type and a collective of the second type that will certainly meet, if at the starting moment they are placed in any two vertices of any labyrinth of the given class. We call this the problem of the 'type meeting' for automata in the given class of labyrinths. Here the problem is completely solved both for the case of the class of all finite plane mosaic labyrinths and for the case of the class of all finite plane rectangular labyrinths. The problem remains unsolved so far for the case of all (finite and non finite) mosaic labyrinths for some pairs of collective types, whereas for the case of the class of all plane rectangular labyrinths, the problem of type meeting is completely unexplored.

Keywords: collective of automata, collective type, plane rectangular labyrinth, plane mosaic labyrinth, type meeting.

References

[1] Kudryavtsev V.B., Uščumlić Š.M., Kilibarda G., "On behaviour of automata in labyrinths", *Discrete Math. Appl.*, **3**:1 (1993), 1–28.

[2] Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Uščumlić Š.M.,, "Sistemy avtomatov v labirintah [Systems of automata in labyrints]", Matematicheskie voprosy kibernetiki, **14**, ed. Lupanov O.B., Fizmatlit, Moscow, 2005, 93–160 (In Russian).

[3] Kilibarda G., Kudryavtsev V.B., Uščumlić Š.M., "Collectives of automata in labyrinths", *Discrete Math. Appl.*, **13**:5 (2003), 429–466.

[4] Budach L., "Automata and labirinths", *Math. Nachrichten*, **86** (1978), 195–282.

[5] Kudryavtsev V.B.,Podkolzin A.S., Uščumlić Š.M., *Vvedenie v teoriyu abstractnyh avtomatov [Introduction to Abstract Automata Theory]*, Izd-vo MGU, Moscow, 1985 (In Russian).

[6] Hoffmann F., "One pebble does not suffice to search plane labyrinths", Lecture Notes in Computer Science, **117**, 1981, 433-444.

[7] Hoffman F., *1-Kiesel-Automaten in Labyrinthen*, Report R-Math-06/82, AdW der DDR, Berlin, 1982.

[8] Kilibarda G., "Ob obhode konechnyh labirintov sistemami avtomatov [On traversing finite labyrinths by systems of automata]", *Diskretnaya matematika*, **2**:2 (1990), 71–81 (In Russian).

[9] Blum M., Kozen D., "On the power of the compass", Proc. 19th IEEE FOCS Conf. (Ann Arbor), 1978, 132–142.

[10] Pultr A., Úlehla J., "On two problems of mice", *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, **31**:2 (1982), 249–262.

[11] Szepietowski A., "A finite 5-pebble-automaton can search every maze", *Information Processing Letters*, **15**:5 (1982), 199-204.

[12] Kilibarda G., "On the minimum universal collectives of automata for plane labyrinths", *Discrete Math. Appl.*, **3**:6 (1993), 555–586.

[13] Kilibarda G., "On Reduction of Automata in Labyrinths", *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.*, **101 (115)** (2017), 47–63.

[14] Hemmerling A., "Normed two-plane traps for finite systems of cooperating compass automata", *J. Inf. Process. Cybern.: EIK*, **28**:8/9 (1987), 453–470.

[15] Hemmerling, A., "Remark on the power of compas", *Lecture Notes in Computer Science*, **233** (1986), 405–413.

[16] Vijayan G., Wigderson A., “Rectilinear graphs and their embeddings”', *SIAM J. Comput.*, **14** (1985), 355–372.

[17] Hoffman F., Kriegel K., *Quasiplane labyrinths*, Preprint P-Math-20/83, AdW der DDR, Berlin, 1983.

[18] Asser G., “Bemerkungen zum Labyrinth-Problem”, *J. Inf. Process. Cybern.: EIK*, **13**:4/5 (1977), 203–216.