О темпах роста структур с конечным числом существенных ограничений

С. А. Комков[1]

Для конечного множества A с заданным на нём множеством операций M определена функция, называемая темпом роста. Порядок роста этой функции характеризует силу и исчислимость множества операций. Показано, что если среди множества всех предикатов, сохраняемых всеми функциями из M, встречается лишь конечное число важных существенных предикатов, то темп роста пары (A, M) имеет логарифмический порядок.

Ключевые слова: темп роста, конечные множества, язык ограничений, логарифмический темп роста.

1. Введение

Рассмотрим декартову степень $n \in \mathbb{N}$ конечного множества A с заданным на нём множеством операций M. Элементы A^n называют *наборами*. Применяя операции из M к уже имеющимся наборам покоординатно, можно получать новые наборы:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_1^k \\ \vdots \\ a_n^k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(a_1^1,\ldots,a_1^k) \\ \vdots \\ f(a_n^1,\ldots,a_n^k) \end{pmatrix}, \ f \in M.$$

Также можно получать новые наборы с помощью уже полученных наборов.

Темпом роста пары (A, M) называют функцию $d_{(A,M)}(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого n функция $d_{(A,M)}(n)$ равна минимальному числу наборов, из которых можно итеративно получить всё A^n, применяя операции из M покоординатно. Таким образом, порядок темпа роста характеризует силу и исчислимость заданного множества операций.

Пример 1. Пусть $A = \{0, 1\}$, $M = \{\neg\}$. Тогда $d_{(A,M)}(n) = 2^{n-1}$.

Пример 2. Пусть $A = \{0, 1, 2\}$, $M = \{+_{\text{mod } 3}\}$. Тогда $d_{(A,M)}(n) = n$.

Темп роста — не просто количественная характеристика. PSPACE-полная задача может быть сведена к NP-полной задаче в зависимости от

[1] *Комков Степан Алексеевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: stepan.komkov@intsys.msu.ru.

Komkov Stepan Alekseevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

темпа роста некоторой её внутренней структуры. Эта зависимость была показана Хьюби Ченом [1] на основе подкванторной задачи удовлетворения ограничений (QCSP) и задачи удовлетворения ограничений (CSP).

Задача QCSP заключается в проверке выполнимости формулы

$$\forall x_1 \dots \forall x_m \; \exists x_{m+1} \dots \exists x_n \left(R_1(x_{i_1^1}, \dots, x_{i_{t_1}^1}) \wedge \dots \wedge R_p(x_{i_1^p}, \dots, x_{i_{t_p}^p}) \right). \quad (1)$$

Здесь R_i, $1 \leqslant i \leqslant p$ — это предикаты, заданные на некотором конечном множестве A. Известно, что QCSP является PSPACE-полной задачей.

CSP является частным случаем QCSP, где в проверяемой формуле отсутствуют кванторы всеобщности. Известно, что CSP является NP-полной задачей.

Допустим, что среди предикатов формулы (1) могут встречаться не любые предикаты, а только предикаты из некоторого подмножества всех предикатов. С помощью соответствия Галуа [2, 3] этому подмножеству предикатов можно сопоставить замкнутое множество операций M на множестве A. В [1] показано, что если темп роста пары (A, M) ограничен сверху полиномом, то в этом случае QCSP задача сводится к CSP задаче за полиномиальное время.

Данный результат показывает важность и актуальность изучения темпов роста произвольных конечных замкнутых множеств с заданными на них операциями.

В настоящей работе изучаются темпы роста таких конечных структур, что их множество операций сохраняет лишь конечное число важных существенных предикатов. В терминах QCPS это означает, что язык ограничений содержит лишь конечно число важных существенных предикатов, что является интересным крайним случаем.

2. Основные понятия и формулировка результата

В дальнейшем без утери общности будем полагать, что $A = E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Замечание. $d_{(E_k, M)}(n) \geqslant \lceil \log_k n \rceil$, $k \geqslant 2$.

Отображение $\rho : E_k^n \to \{0, 1\}$ называют *предикатом арности n*.

Говорят, что операция f *сохраняет предикат ρ* арности n, если для любых таких наборов $a^1, \dots, a^m \in E_k^n$, что ${a^i}^\top \in \rho$, $1 \leqslant i \leqslant m$, выполняется $\left(f(a_1^1, \dots, a_1^m), \dots, f(a_n^1, \dots, a_n^m)\right)^\top \in \rho$. Классы функций могут быть описаны через предикаты, которые они сохраняют [4].

Пусть R — множество предикатов, а M — множество операций. Через $\mathrm{Pol}(R)$ обозначают множество всех операций, сохраняющих каждый предикат из R. Через $\mathrm{Inv}(M)$ обозначают множество всех предикатов, которые сохраняются всеми операциями из M.

Пусть на множестве $\{1,\ldots,n\}$ задано отношение эквивалентности. Предикат ρ называют *диагональю*, если $\rho(a_1,\ldots,a_n)=1$ тогда и только тогда, когда $a_i=a_j$ для всех пар $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ из одного класса эквивалентности. Для удобства множество диагоналей дополняют пустым предикатом. Тем самым, ρ — диагональ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Pol}(\{\rho\})=P_k$.

Предикатом равенства называют такую диагональ $\rho_=$ арности 2, что $\rho_=(x,y)=1\Leftrightarrow x=y$.

Предикаты могут выводиться из других предикатов аналогично операциям суперпозиции над функциями. Говорят, что предикат ρ *выводится из множества предикатов* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, если он представим в виде

$$\rho(x_1,\ldots,x_n)=\exists y_1\ldots\exists y_l\ \big(\rho_{i_1}(z_{1,1},\ldots,z_{1,n_1})\wedge\ldots\wedge\rho_{i_s}(z_{s,1},\ldots,z_{s,n_s})\big),$$

где $z_{i,j}\in\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_l\}$ и $\rho_{i_j}\in\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}\cup\{\rho_=\}$. При этом $\mathrm{Pol}(\{\rho\})\supset\mathrm{Pol}(\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}})$.

Предикат называют *существенным*, если он не выводится без кванторов существования из множества всех предикатов меньшей арности.

Через $\widetilde{R}$ обозначают множество всех существенных предикатов.

Замечание. $d_{(E_k,M)}(n)=d_{(E_k,M\cap\widetilde{R})}(n)$.

Предикат ρ называют *важным*, если $\rho(a,\ldots,a)=1$ для любого $a\in E_k$ и при этом предикат ρ не является диагональю, то есть $\mathrm{Pol}(\{\rho\})\neq P_k$.

Термин важного предиката впервые был введён в [5] для доказательства следующего утверждения:

Теорема. *$d_{(E_k,M)}(n)-\log_k n=O(1)$ при $n\to\infty$ тогда и только тогда, когда не найдётся важного предиката $\rho\in Inv(M)$. Причём, если не нашлось важного предиката $\rho\in Inv(M)$, то $\left|d_{(E_k,M)}(n)-\log_k n\right|\leqslant k+1$ для любого n.*

Через $\mathcal{R}_{\mathrm{Imp}}$ обозначают множество всех важных предикатов.

В настоящей работе получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть $\left|Inv(M)\cap\widetilde{R}\cap\mathcal{R}_{Imp}\right|<\infty$. Тогда $d_{(E_k,M)}(n)\asymp\log n$, $n\to\infty$.*

Следствие 1. *Пусть $\left|Inv(M)\cap\widetilde{R}\right|<\infty$. Тогда $d_{(E_k,M)}(n)\asymp\log n$, $n\to\infty$.*

Список литературы

[1] Chen H., "Quantified constraint satisfaction and the polynomially generated powers property", International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, 2008, 197–208.

[2] Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А., "Теория Галуа для алгебр Поста I", *Кибернетика*, 1969, № 3, 1–10.

[3] Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А., "Теория Галуа для алгебр Поста II", *Кибернетика*, 1969, № 5, 1–9.

[4] Lau D., *Function Algebras on Finite Sets*, Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2006, 668 c.

[5] Комков С. А., "Мощности генерирующих множеств по операциям из классов решетки Поста", *Дискрет. матем.*, **30**:1 (2018), 19–38; *Discrete Math. Appl.*, **29**:3 (2019), 159–173.

On growth rate of structures with a finite number of essential constraints

Komkov S.A.

Growth rate is a function defined for an arbitrary finite set A with a set of operations M defined on it. Its order characterizes the strength of given operations. We show that if there is only a finite number of important essential predicates among all predicates that are preserved by each function from M then the growth rate order of the (A, M) pair is logarithmic.

Keywords: growth rate, finite sets, constraint language, logarithmic growth rate.

References

[1] Chen H., "Quantified constraint satisfaction and the polynomially generated powers property", International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, 2008, 197–208.

[2] Bodnarchuk V. G., Kaluzhnin L. A., Kotov V. N., Romov B. A., "Galois theory for post algebras. I", *Cybernetics*, **5**:3 (1969), 243–252.

[3] Bodnarchuk V. G., Kaluzhnin L. A., Kotov V. N., Romov B. A., "alois theory for Post algebras. II", *Cybernetics*, **5**:5 (1969), 531–539.

[4] Lau D., *Function Algebras on Finite Sets*, Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2006, 668 c.

[5] Komkov S. A., "On classes of functions of many-valued logic with minimal logarithmic growth rate", *Discrete Mathematics and Applications*, **30**:4 (2020), 265–272.