Классификация регулярных графов трёхточечных множеств

В. В. Промыслов[1]

Регулярным графом кольца матриц над полем называется граф, множеством вершин которого являются невырожденные матрицы, а ребра соединяют в точности те вершины, сумма которых является вырожденной матрицей.

В 2009 году на 22-ой Британской конференции по комбинаторике был сформулирован вопрос о конечности хроматического числа этого графа. Этот вопрос остается открытым для полей характеристики 0.

Для исследования этого вопроса в статье [4] было введено определение регулярного графа множества, обобщающее понятие регулярного графа кольца матриц. Между этими понятиями присутствует тесная связь. Например, в случае, если хроматическое число регулярного графа окружности на евклидовой плоскости бесконечно, то таковым будет и хроматическое число регулярного графа кольца матриц порядка выше двух.

В этой работе исследована структура регулярных графов множеств из трех элементов, а сами графы классифицированы с точностью до изоморфизма.

Ключевые слова: регулярный граф кольца матриц, классификация графов с точностью до изоморфизма.

1. Введение и необходимые определения

Пусть $\mathbb{F}$ — некоторое поле, $M_n(\mathbb{F})$ — кольцо матриц размера $n \times n$ над полем $\mathbb{F}$, $GL_n(\mathbb{F})$ — множество невырожденных матриц.

Определение 1. *Регулярным графом кольца* $M_n(\mathbb{F})$ *называется граф* $\Gamma_n(\mathbb{F})$ *с множеством вершин* $GL_n(\mathbb{F})$ *такой, что различные матрицы* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ *соединены ребром, если и только если* $\det(A + B) = 0$.

В 2009 году математиками С. Акбари, М. Джамаали и С. Сеед Факхари было доказано, что если характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2, то кликовое число регулярного графа конечно (см. [1]). В связи с этим, тот же коллектив авторов поставил вопрос (см. [2, задача 525, стр. 1082-1083]) о том, является ли конечным хроматическое число графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$. В 2015

[1] *Промыслов Валентин Валерьевич* — аспирант каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: valentin.promyslov@gmail.com.

Promyslov Valentin Valeryevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Algebra.

году И. Томон дал отрицательный ответ на поставленный вопрос (см. [3, теорема 2.4]) доказав, что при натуральном $n \geqslant 2$ и простом $p \geqslant 3$ выполнено $\chi(\Gamma_n(\overline{\mathbb{F}_p})) = \infty$, где $\overline{\mathbb{F}_p}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_p$ из p элементов. Однако вопрос остается открытым для полей характеристики 0, в частности, для $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Для исследования этого вопроса в статье [4] было введено обобщение понятия регулярного графа для произвольного подмножества векторного пространства $\mathbb{F}^n$.

Определение 2. *Пусть n — натуральное число, $A \subseteq \mathbb{F}^n$. Регулярным графом множества A называется граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n \setminus A$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus A$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.*

Между регулярными графами кольца матриц и регулярными графами множеств существует тесная связь. Например, в случае, если хроматическое число регулярного графа окружности на евклидовой плоскости бесконечно, то таковым будет и хроматическое число регулярного графа кольца матриц порядка выше двух. Этот результат и некоторые свойства регулярного графа множества описаны в статье [4].

В этой работе мы займемся классификацией регулярных графов конечного множества точек. Для этого введем следующее определение:

Определение 3. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики 0, n, m — натуральные числа. Обозначим через $\Gamma^n(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.*

2. Регулярные графы трёхточечных множеств на прямой

В этой секции мы классифицируем графы $\Gamma^1(a, b, c)$ с точностью до изоморфизма. Везде ниже мы полагаем, что поле $\mathbb{F}$ имеет характеристику 0.

Лемма 1. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{F}$ различны. Тогда $\Gamma^1(a, b, c) \simeq \Gamma^1(0, 1, f)$ для некоторого $f \in \mathbb{F}$.*

В поле $\mathbb{F}$ нулевой характеристики всегда можно выделить подкольцо целых чисел, которое мы отождествим с $\mathbb{Z}$, и подполе рациональных чисел, которое мы отождествим с $\mathbb{Q}$.

Лемма 2. *При $f_1, f_2 \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{Q}$ графы $\Gamma^1(0, 1, f_1)$ и $\Gamma^1(0, 1, f_2)$ изоморфны.*

Доказательство этой леммы опирается на существование базиса Гамеля поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$.

Учитывая наличие порядка на множестве рациональных чисел, мы можем считать, что при $q \in \mathbb{Q}$ граф $\Gamma^1(0,1,q)$ изоморфен графу $\Gamma^1(0,1,q')$ для некоторого $q' \in \mathbb{Q},\ q > 1$.

Лемма 3. *Графы* $\Gamma^1(0,1,q)$ *не являются изоморфными при различных* $q \in \mathbb{Q},\ q > 1$.

Леммы 1, 2 и 3 выше позволяют классифицировать графы $\Gamma^1(a,b,c)$ с точностью до изоморфизма.

Теорема 1. *Пусть* $a,b,c \in \mathbb{F}$ *различны. Тогда граф* $\Gamma^1(a,b,c)$ *изоморфен одному из следующих графов:*

1) $\Gamma^1(0,1,f)$ *для некоторого* $f \in \mathbb{F}\setminus\mathbb{Q}$*, причем все графы такого типа изоморфны;*

2) $\Gamma^1(a,b,c) \simeq \Gamma^1(0,1,q)$ *для некоторого* $q \in \mathbb{Q},\ q > 1$*, причем при различных* q *все графы такого типа попарно неизоморфны.*

3. Регулярные графы трёхточечных множеств в $\mathbb{F}^n$

В этой секции мы переместим фокус на случай произвольной размерности, т.е. граф $\Gamma^n(a,b,c)$, где $a,b,c \in \mathbb{F}^n$. Оказалось, что все компоненты связности этого графа, за исключением содержащих клику и вершины степени два, изоморфны графу Кэли (см., например, [5]) группы $S = \langle \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} \mid \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{abc})^2 = e\rangle$ симметрий $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ плоскости относительно точек a,b,c. Поскольку поле характеристики 0 бесконечно, этот факт позволил свести общий случай к регулярному графу на прямой:

Теорема 2. *Пусть* $a,b,c \in \mathbb{F}^n$ *различны. Тогда граф* $\Gamma^n(a,b,c)$ *изоморфен графу* $\Gamma^1(a',b',c')$ *для некоторых* $a',b',c' \in \mathbb{F}$.

Тем самым мы получаем, что классификация графов в общем случае точно такая, как и в одномерном.

Автор выражает глубокую благодарность А.В. Михалёву и А.М. Максаеву за интерес к задаче и помощь в работе.

Список литературы

[1] S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari, “The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite”, *Linear Algebra and its Applications*, **431** (2009), 1715 - 1718.

[2] P.J. Cameron, “Research problems from the BCC22”, *Discrete Math*, **311** (2011), 1074 - 1083.

[3] I. Tomon, “On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras”, *Linear Algebra Appl*, **475** (2015), 154 - 162.

[4] А.М. Максаев, В.В. Промыслов, “О тотальном и регулярном графах многочлена”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **23**:4 (2021), 113—140.

[5] U. Knauer, K. Knauer, *Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices, 2nd Rev. and Ext. ed.*, de Gruyter, 2015, 349 p pp.

[6] Бунина Е., Михалев А., Пинус А, *Элементарная и близкая к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр*, Издательство МЦНМО, Москва, 2015

Classification of regular graphs of three-point sets

Promyslov V.V.

A regular graph of the ring of matrices over a field is a graph on the set of invertible matrices. Two matrices are connected with an edge if and only if their sum is singular.

One of the questions in this field is whether the chromatic number of this graph is finite or not. This question was first formulated in 2009 at the 22nd British Conference on Combinatorics. It remains open for the fields of the characteristic 0.

To investigate this issue in the article [4] was introduced a definition of a regular graph of a set. The regular graph of a set generalizes the concept of the regular graph of the matrix ring. There is a close connection between these concepts. For example, if the chromatic number of a regular graph of a circle on the Euclidean plane is infinite, then so will be the chromatic number of a regular graph of the matrix ring of order higher than two.

In this paper, we investigate the structure of regular graphs of sets of three elements and classify the graphs up to isomorphism.

Keywords: regular graph of the matrix ring, classification of graphs up to isomorphism.

References

[1] S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari., “The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite”, *Linear Algebra and its Applications*, **431** (2009), 1715 - 1718

[2] P.J. Cameron., “Research problems from the BCC22”, *Discrete Math*, **311** (2011), 1074 - 1083

[3] I. Tomon, “On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras”, *Linear Algebra Appl*, **475** (2015), 154 - 162

[4] A.M. Maksaev, V.V. Promyslov, “On total and regular graphs of a polynomial”, *Fundamental and Applied Mathematics*, **23**:4 (2021), 113—140

[5] U. Knauer, K. Knauer, *Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices, 2nd Rev. and Ext. ed.*, de Gruyter, 2015, 349 p pp.