

Вычисление функций Белого с использованием техники модулярных функций

А. М. Ватузов¹

В работе описан алгоритм вычисления функций Белого для заданного детского рисунка с использованием техники модулярных функций. Приведена функция Белого с группой монодромии M_{24} , вычисленная с использованием этого метода.

Ключевые слова: детские рисунки, функции Белого, модулярные функции

В работе рассматривается задача вычисления функции Белого по заданному детскому рисунку. *Детский рисунок* – двукрашенный (связный) граф Γ , вложенный в компактную ориентированную поверхность X таким образом, что дополнение $\Gamma \setminus X$ гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков. Пусть X – компактная риманова поверхность. *Функцией Белого* называется накрытие $\beta : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ неразветвлённое вне $0, 1, \infty$. Тогда прообраз $\beta^{-1}[0, 1]$ – детский рисунок на X . Верно и обратное – для любого детского рисунка D существует пара Белого (X, β) такая, что $\beta^{-1}[0, 1]$ изоморфен D . Более того, в качестве X можно выбрать комплексную алгебраическую кривую определенную над $\overline{\mathbb{Q}}$ (см. [1]).

Итак, для каждого детского рисунка существует пара Белого, однако нахождение ее явного вида – нетривиальная задача. В случае $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ несложно написать систему алгебраических уравнений на коэффициенты функции Белого. Стандартный метод решения систем алгебраических уравнений – метод базиса Грёбнера. К сожалению, с увеличением количества переменных его сложность быстро растёт, и он практически не применим для детских рисунков с более чем 12 рёбрами. Поэтому разрабатываются другие методы вычисления функций Белого, подробный обзор этих методов дан в [2].

Общая схема вычислений. Решим систему уравнений приближенно, а затем получим точное решение в алгебраических числах с помощью LLL-алгоритма (см. [3]). Приближенное решение с достаточной точностью можно найти с помощью метода Ньютона, но требуется начальная

¹*Ватузов Александр Максимович* – аспирант каф. теоретической информатики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: amvatuzov@yandex.ru.

Vatuzov Alexander Maximovich – graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, department of theoretical computer science.

точка, для которой метод будет сходиться к решению, соответствующему заданному детскому рисунку.

Существуют разные техники получения такого начального приближения. В настоящий момент рекордом таких вычислений является вычисление функций Белого с группами монодромии J_2 и Co_3 степеней 100 и 276 соответственно (см. [4], [5]). В этих работах используется подход с вычислением модулярной функции. Тем не менее, эти вычисления – своего рода искусство, связанное с решением разных вопросов, влияющих на сходимость метода.

Рисунки, перестановки и модулярная группа. Один из способов задать детский рисунок D с n ребрами – выписать перестановки ребер, которые соответствуют циклическим порядкам при обходе вокруг черных и белых вершин: $a, b \in S_n$. Группа порождаемая ими называется *группой вращений ребер* рисунка, обозначается $ER(D)$ и изоморфна группе монодромии соответствующей функции Белого.

Будем говорить, что рисунок принадлежит $(2, 3)$ -типу, если все белые вершины имеют степень 1 или 2, а все чёрные вершины – степень 1 или 3. Любой детский рисунок может быть приведен к этому виду с помощью дополнительной триангуляции граней рисунка, однако эта операция увеличивает количество рёбер в 6 раз, что усложняет вычисления.

Для детского рисунка $(2, 3)$ -типа порождающие его группы вращений рёбер обладают свойством $a^3 = b^2 = 1$. Таким образом, можно считать, что на ребрах этого рисунка действует модулярная группа

$$\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1 \rangle.$$

Выберем стабилизатор некоторого ребра $\Gamma \subseteq \mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Тогда кривая может быть получена как фактор верхней полуплоскости: $t : \mathbb{H} \xrightarrow{\Gamma} X$. Фундаментальная область группы Γ состоит из нескольких копий фундаментальной области группы $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Группа Γ попарно отождествляет дуги-стороны фундаментальной области, задавая склейку, которая дает рисунок D . Если $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, то отображение t – функция на \mathbb{H} . Наша цель – научиться вычислять приближенные значения этой функции.

Точка $+i\infty$ соответствует центру одной из граней детского рисунка, пусть эта грань имеет степень m . Тогда группа Γ содержит элемент $z \rightarrow z + m$, а поскольку функция $t(z)$ инвариантна относительно Γ , то можно ее записать в виде $t(z) = f(q)$, где $q = \exp(2\pi iz/m)$. При этом функция f отображает окрестность точки $q = 0$ в окрестность соответствующего полюса β взаимнооднозначно. Отнормируем функцию Белого β так, чтобы этот полюс находился в точке ∞ . Тогда функция $f(q)$ будет иметь полюс первого порядка в точке $q = 0$ и разложение в ряд Лорана будет имеет вид

$$f(q) = c_{-1}q^{-1} + c_0 + c_1q + c_2q^2 + \dots \quad (1)$$

Для приближенных вычислений оставим только N слагаемых в (1). Составим систему *линейных* уравнений на коэффициенты c_i . Осталось еще две степени свободы нормировки функции β , что дает два уравнения. Остальные уравнения получаем, выбирая $N - 2$ пары точек на границе фундаментальной области: если $g \in \Gamma$ и $g(z_1) = z_2$, то должно быть выполнено $t(z_1) = t(z_2)$.

В вычислениях $N \approx 200$ было достаточно, чтобы стабильно находить приближённые (с точностью 0.01) коэффициенты $f(q)$. Подставляя координаты вершин модулярной фигуры в (1), получаем приближенные координаты вершин детского рисунка, что дает приближенные значения коэффициентов функции Белого, которые используем как стартовую точку метода Ньютона.

Результаты вычислений. В работе [6] классифицированы взвешенные деревья D такие, что группа вращений ребер $ER(D)$ примитивна и отлична от групп A_n и S_n . Применяя описанную технику вычислений, удалось вычислить функции Белого для всех взвешенных деревьев (2, 3)-типа со специальными примитивными группами.

Ниже приведен результат вычислений для рисунка на рис. 1, который не является взвешенным деревом. Вычисления проводились в системе SageMath.

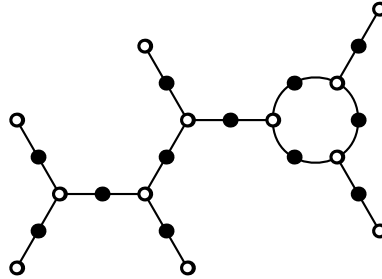


Рис. 1. Паспорт $(2^{12} | 3^6 1^6 | 21^1 3^1)$, $ER = \mathbf{M}_{24}$.

$$\beta = \frac{P_3^3 \cdot P_1}{cz^3} = \frac{Q_2^2}{cz^3} + 1$$

$$c = -2^{36} \cdot 3^6 \cdot 7^3 (1 - \omega)^2 (1 - 2\omega)(1 + 2\omega)^{11}$$

$$\omega = \frac{1 - \sqrt{-7}}{2}$$

$$\begin{aligned} P_3 = & z^6 + 19(1 - \omega)(1 - 2\omega)z^5 + \omega(1 - 2\omega)(67 + 284\omega)z^4 + \\ & + 2 \cdot 3(1 - \omega)(1 - 2\omega)(23 - 2\omega)(11 + 12\omega)z^3 + \\ & + 7(5 - 2\omega)(3 - 4\omega)z^2 - 7(1 - \omega)(5 - 2\omega)^2(7 + 6\omega)z - \\ & - 7\omega^{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= z^6 + 3^3(1-\omega)(1-2\omega)z^5 + 3\omega(1-2\omega)(49+212\omega)z^4 - \\
&\quad - 2 \cdot 3^2(1-\omega)(1-2\omega)(1-4\omega)(137-70\omega)z^3 - \\
&\quad - 3 \cdot 5 \cdot 7^3(3-4\omega)(5-2\omega)z^2 - 3^2 \cdot 7^3(1-\omega)(5-2\omega)^2(7+6\omega)z - \\
&\quad - 7^3\omega^{30} \\
Q_2 &= z^{12} + 2 \cdot 3 \cdot 7(1-\omega)(1-2\omega)z^{11} - \\
&\quad - 3 \cdot 7(1-\omega)(1-2\omega)(1+2\omega)(3-4\omega)(3+4\omega)z^{10} + \\
&\quad + 2^2 \cdot 7\omega(1-2\omega)(1+2\omega)(3-8\omega)(83-60\omega)z^9 + \\
&\quad + 3^2 \cdot 7^2\omega(1+2\omega)(7+18\omega)(25-86\omega)z^8 + \\
&\quad + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11(1-\omega)(2\omega+9)(53-18\omega)z^7 - \\
&\quad - 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2(1-\omega)(1+2\omega)(51+4\omega)(1239-880\omega)z^6 + \\
&\quad + 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2(1-2\omega)(1+2\omega)^2(317-414\omega)z^5 - \\
&\quad - 3^2 \cdot 7^2(1-2\omega)(1+2\omega)(9-2\omega)(21-10\omega)(1171+2546\omega)z^4 - \\
&\quad - 2 \cdot 7^2(1-\omega)(1-2\omega)(1+2\omega)(41-22\omega)(421-586\omega)(671+318\omega)z^3 + \\
&\quad + 3 \cdot 7^3(1-\omega)(1+2\omega)(5-2\omega)(7-2\omega)(1793+6742\omega)z^2 - \\
&\quad - 2^2 \cdot 3 \cdot 7^3\omega^{29}(5-2\omega)^2(7+6\omega)z - \\
&\quad - 7^3\omega^{60}
\end{aligned}$$

Calculating Belyi functions using modular functions approach Vatuzov A. M.

An algorithm for calculating the Belyi functions via modular functions is described. A Belyi function with the monodromy group M_{24} calculated using this method is presented.

Keywords: dessins d'enfants, Belyi functions, modular functions

References

- [1] Zvonkin A. K., Lando C. K., *Graphs on Surfaces and Their Applications*, 2004 (In Russian).
- [2] Sijtsling J., Voight J., "On computing Belyi maps", *Publications mathématiques de Besançon*, **1** (2014), 73–131.
- [3] Lenstra A. K., Lenstra H. W. Jr., Lovasz L., "Factoring polynomials with rational coefficients", *Mathematische Annalen*, **261**:4 (1982).
- [4] Monien H., "The sporadic group J_2 , Hauptmodul and Belyi map", arXiv: <https://arxiv.org/abs/1703.05200>.
- [5] Monien H., "The sporadic group Co_3 , Hauptmodul and Belyi map", arXiv: <https://arxiv.org/abs/1802.06923>.
- [6] Adrianov N. M., Zvonkin A. K., "Weighted trees with primitive edge rotation groups", *Fundament. i prik. matem.*, **18**, no. 6 (2013), 5–50; *J. Math. Sci.*, **209**:2 (2015), 160–191 (In Russian).