Кванторная выразимость в логике предикатов

Ю. С. Капустин[1]

В математике новые понятия часто вводятся путем кванторных определений. При наличии достаточно большого запаса таких понятий они могут позволить переформулировать новые кванторные определения бескванторным образом. Это делает заслуживающей рассмотрения задачу отыскания базисных понятий в заданной предметной области, которые делают избыточным дальнейшее кванторное определение.

В данной работе рассматривается кванторная выразимость небольшой глубины в 4 алгебраических системах. Были найдены базисы выразимости для небольшой глубины.

Ключевые слова: логика предикатов, кванторная выразимость, алгебраическая система.

1. Введение

Базисные операции и отношения алгебраической системы могут порождать при помощи формул алгебры логики новые операции и отношения. В данной работе исследуется возможность сведения кванторной выразимости таких операций и отношений к бескванторной. Новые понятия в математике определяются при помощи кванторных конструкций. При этом желательно обходиться минимальным количеством таких операций и отношений, выбрав системы понятий, через которые как можно большее число других понятий можно было бы выразить бескванторным образом.

В работе описываются системы отношений и операций, с помощью которых можно бескванторно выразить в различных алгебраических системах операции и отношения, заданные формулами фиксированной глубины.

Данная работа продолжает исследования, начатые в работе [1].

[1] *Капустин Юрий Сергеевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kapustin.iu@yandex.ru

Kapustin Iurii Sergeevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

2. Основные понятия и результаты

Напомним, что алгебраической системой называется множество M с определёнными на нём операциями и предикатами. Будем предполагать, что оно содержит $\varnothing$. Сигнатурой S над M будем называть отображение $\Sigma : S \to F$, сопоставляющее элементам множества символов S предикаты и операции, определенные на M. Формулы и термы в сигнатуре Σ определяются следующим образом:

1) x_i, где x_i – символ переменной из фиксированного счетного списка – терм.

2) Если $\Sigma(s) = f$ – n—местная операция на M, $t_1, \dots, t_n$ – термы, то слово $s(t_1, \dots, t_n)$ – терм.

3) Если $\Sigma(s) = p$ – n—местный предикат, определенный на M, $t_1, \dots, t_n$– термы, то слово $s(t_1, \dots, t_n)$ – формула.

4) Если $P_1, \dots P_k$ — формулы, то слова $(P_1) \bigvee \cdots \bigvee (P_k)$, $(P_1) \& \dots \& (P_k), \neg(P_1), (P_1) \to (P_2)$ – формулы.

5) Если P – формула, $x_1, \dots, x_n$ — символы переменных, то слова $\forall x_1, \dots, x_n(P), \exists x_1, \dots, x_n$
(P) – формулы.

6) Если P – формула, x – переменная, то $set_x(P)$ — терм.

Каждая формула определяет естественным образом некоторый предикат, заданный на наборах элементов множества M. Каждый терм определяет естественным образом некоторую операцию, заданную на наборах элементов M, и принимающую значения в M.

Уточним понимание значения терма $set_x(P)$, где P – формула от свободной переменной x и свободных переменных $x_1, \dots, x_n$. Будем считать, что этот терм при фиксированном значении свободных переменных $x_1, \dots, x_n$ имеет значением множество значений x, для которых P принимает истинное значение. Если такое множество не определено корректно или не принадлежит M, значением $set_x(P)$ полагаем $\varnothing$.

Если предикат или операция f определяется какой-либо формулой или термом в сигнатуре Σ, то говорим, что f логически выразимо над F (через F). Если f определяется формулой или термом в Σ, не содержащим кванторов и описателей *set*, то говорим, что f бескванторно (элементарно) выразимо над F.

Если формула или терм содержит цепочку вложенных кванторов и описателей длины n, но не содержит цепочку длины более n, то назовём n квантовой глубиной формулы или терма. Если предикат или операция f определяется какой-либо формулой или термом в сигнатуре Σ глубины n, назовём предикат или операцию f n-выразимым над F.

Для некоторых алгебраических систем удалось найти набор предикатов и операций, через которые бескванторно выражаются все предикаты и операции, n-выразимые в данной алгебраической системе для малых n. Были доказаны следующие теоремы:

Рассмотрим числовую прямую $\mathbb{R}$ с определённой на ней операцией $\leq$.

Обозначим через R множество $\mathbb{R}\bigcup 2^{\mathbb{R}}$, на котором определены предикаты $a \in b, a \leq b$.

Обозначим через major(a) операцию, значение которой — множество верхних граней множества a, а через minor(a) операцию, значение которой — множество его нижних граней.

Обозначения $a =_? b$ и $a \in_? b$ будем использовать для операций, значение которых равно $2^{\mathbb{R}}$, если истинен соответствующий предикат $a = b$ и $a \in b$. В противном случае значение предиката равно $\varnothing$.

Обозначим через $Crd_1(a)$ предикат, истинный в том и только в том случае, если a - одноэлементное множество.

Теорема

Все предикаты и операции, 2-выразимые в алгебраической системе $\mathbb{R}\bigcup 2^{\mathbb{R}}, \{\in, \leq\}$*, бескванторно выразимы над системой операций и предикатов* $\{a \in b, \mathbb{R}\backslash a, a\bigcup b, (-\infty, a],$
$, [a, +\infty), a = \varnothing, a =_? \varnothing, major(a), minor(a), Crd_1(a)\}$*, причём выражение не содержит вложенных друг в друга операций вида* $major(a), minor(a)$ *и не содержит этих операций и предикат проверки на одноэлементность одновременно.*

Определим операции $lip(a, b), rip(a, b)$.

Значение операции lip(a, b) — это множество точек, для которых расстояние до ближайшей слева точки замыкания множества a больше, чем расстояние до ближайшей слева точки замыкания b

Значение операции rip(a, b) — это множество точек, для которых расстояние до ближайшей справа точки замыкания множества a больше, чем расстояние до ближайшей справа точки замыкания множества b.

Теорема

Все операции, 3-выразимые в алгебраической системе $\mathbb{R}\bigcup 2^{\mathbb{R}}$,
$\{\in, \leq\}$*, бескванторно выразимы над множеством операций* $\{a \in b, \mathbb{R}\backslash a, a\bigcup b, (-\infty, a], [a, +\infty), a =_? \varnothing, major(a), minor(a),$
$lip(a, b), rip(a, b)\}$

Определим на натуральных числах и множествах натуральных чисел операции div(x), mod (x), sidiv (x), simod (x), int (x). Значение операции div(x) — множество делителей x, mod (x) — множество кратных x, sidiv (x) — объединение собственных делителей элементов множества x, simod (x) — объединение собственных кратных элементов множества x, int (x) — множество чисел, являющихся для каждого элемента множества x или делителем, или кратным. Для тех x, для которых заданное таким образом значение одной из операций не определено корректно (например, div(x), если x — множество чисел, а не число), значение этой операции равно $\varnothing$.

Теорема

Все предикаты и операции, 2-выразимые в алгебраической системе $\mathbb{N}\bigcup 2^{\mathbb{N}}, \{\in, |\}$ *бескванторно выразимы над* $\{\in, \mathbb{N}\backslash, \bigcup, div(x), mod(x), = \varnothing, =_? \varnothing, int(x), sidiv(x), simod(x)\}$

Определим на точках булева куба и их множествах операции $^*a$, a^*, $^{**}a$, a^{**}, $int(a)$.

Здесь значение операции *a — множество точек, меньших a, операции a* — множество точек, больших a, $**a$ — множество точек, меньших хоть одного элемента a, a^{**} — множество точек, больших хоть одного элемента a, $int(a)$ — множество точек, сравнимых с каждым элементом множества a. Для тех a, для которых значение одной из операций не определено корректно, значение этой операции равно $\varnothing$.

Теорема

Все предикаты и операции, 2-выразимые в алгебраической системе $B^n\bigcup 2^{B^n}, \{\in, \leq\}$ *формулой, не зависящей от n, где n – произвольно, бескванторно выразимы над* $\{\in, B^n\backslash, \bigcup, *a, a*, = \varnothing, =_? \varnothing, int(a), ^{**}a, a^{**}\}$ *формулой, не зависящей от n.*

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Будем использовать обозначения $U_1 = 2^{\mathbb{Z}}\bigcup\mathbb{Z}$, $U_2 = U_1\bigcup 2^{U_1}$. На множестве U_2 естественным образом задано отношение $a \in b$.

Определим элементах U_2 следующие операции:

—$a\uparrow$ — множество всех множеств, содержащих a.

— $\bigcap(a)$ — пересечение всех подмножеств a

— $\bigcup(a)$ — объединение всех подмножеств a

— trans(a,b,c) — множество элементов x из U_1, что $(a\bigcap x\bigcup b\backslash x) \in c$

— $\backslash(a, b)$ — множество попарных разностей элементов a и b

Для тех значений переменных, для которых значение одной из операций не определено корректно, значение этой операции равно $\varnothing$.

Теорема

Все операции, 2-выразимые в алгебраической системе $U_2 = U_1\bigcup 2^{U_1}, \{\in\}$, *бескванторно выразимы над* $\{U_1\backslash, \bigcup, a*, a\uparrow, \bigcap(a), \bigcup(a), 2^a, trans(a, b, c), \{a\}, \backslash(a, b)\}$

3. Бескванторная выразимость на множестве $\{\mathbb{R}\bigcup 2^{\mathbb{R}}\}$ с сигнатурой $\{\in, \leq\}$

Рассмотрим множество $R{=}\mathbb{R}\bigcup 2^{\mathbb{R}}$ с естественным образом определенной на нем сигнатурой $\{\in, \leq\}$. При этом считаем предикат $\leq$ принимающим ложные значения всегда, когда он применен не к двум числам, а предикат $\in$ ложным всегда, когда он применён не к числу и множеству.

В этой главе числом называется элемент множества $\mathbb{R}$, множеством — элемент множества $\bigcup 2^{\mathbb{R}}$.

Так как принадлежать множествам-элементам R могут лишь элементы множества $\mathbb{R}$, для данного множества будем интерепретировать терм $set_x(P)$, где P – формула от свободной переменной x и свободных переменных $x_1, \dots, x_n$, как $\{y \in \mathbb{R} : P(y) = \text{И}\}$ — операцию от переменных $x_1, \dots, x_n$, значение которой равно множеству всех x, принадлежащих $\mathbb{R}$, на которых верен предикат, задаваемый формулой P.

В дальнейшем мы также будем рассматривать множества вида $\{M \bigcup 2^M\}$ и интерпретировать в них $set_x(P)$ как $\{y \in M : P(y) =\text{И}\}$.

Обозначения $a =_? b$ и $a \in_? b$ будем использовать для операций, значение которых равно $2^{\mathbb{R}}$, если истинен соответствующий предикат $a = b$ или $a \in b$. В противном случае значение предиката равно $\varnothing$.

Будем послойно изучать предикаты и операции, n — выразимые над R. Начнем с операций, выразимых на первом слое.

Теорема 1. $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (a \in_? b), (-\infty, a], [a, \infty)\}$ *образуют базис 1-выразимых операций в* R

Доказательство. Термы, которыми задаются эти операции, имеют вид:

$set_x(P(A_i(x, x_1, \dots, x_n)))$, где:

P -формула, задающая некоторую булеву функцию.

A_i — бескванторные операции вида $x_k \leq x_j$ и $x_k \in x_j$

Булеву функцию, задающую P, можно выразить в базисе $\{\neg, \bigvee\}$. Используя равенства:

$set_x(\neg P) = \mathbb{R}\backslash(set_x(P))$

$set_x(P \bigvee Q) = (set_x(P)) \bigcup (set_x(Q))$

преобразуем терм к равносильному терму, выразимому над термами вида $set_x(A_i)$ и операциями $\bigcup$ и $\mathbb{R}\backslash$, где A_i — бескванторный терм.

Рассмотрим операции, выразимые термами $set_x(A_i)$:

$set_x(a \in b) = (a \in_? b)$ — условная операция, равная $\mathbb{R}$, если $a \in b$, и $\varnothing$ иначе.

$set_x(a \leq b) = (a \leq_? b)$ — условная операция, равная $\mathbb{R}$, если $a \leq b$, и $\varnothing$ иначе.

$set_x(x \leq a) = (-\infty, a]$. Результат данной операции считаем равным $\varnothing$, если a — множество

$set_x(a \leq x) = [a, \infty)$. Результат данной операции считаем равным $\varnothing$, если a — множество

$set_x(x \in a) = a$. Получается тождественная операция, суперпозицию которой можно не рассматривать.

$set_x(a \in x) = \varnothing$.

Следовательно, все операции, выразимые на первом уровне над R в данной сигнатуре бескванторно выражаются над $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (a \leq_? b), (a \in_? b), (-\infty, a], [a, \infty), \varnothing\}$. При этом все операции, бескванторно выразимые через данные, 1-выразимы:

- Если операция P выразима термом $set_x(P')$, операция Q — термом $set_x(Q')$, где P' и Q' не содержат кванторов и описателей, то операция $P \bigcup Q$ выражается термом $set_x(P' \bigvee Q')$, операция $\mathbb{R}\backslash P$ выражается формулой $set_x(\neg P')$

- Если операция P выразима термом $set_x(P')$, то результат операции P — некое множество, и значения $set_x(P \in b)$, $set_x(P \leq b)$, $set_x(a \leq P)$ равны $\varnothing$

- Если операция P выразима термом $set_x(P')$, то значения $set_x(P \in b)$, $set_x(P \leq b)$, $set_x(a \leq P)$ равны $\varnothing$

- Если операция P выразима термом $set_x(P')$, то $(a \in_? P)$ выражается термом $set_x(a \in P')$. При этом наружные для терма P' операции пересечения и дополнения до $\mathbb{R}$ можно вынести:

$set_x(a \in (\mathbb{R}\backslash Q')) = set_x((\neg a \in P')\&(x \leq a \bigvee a \leq x))$

$set_x(a \in (Q' \bigcup R')) = set_x(\neg a \in Q' \bigvee \neg a \in R')$

$set_x(a \in (set_y(P'')) = set_x(P''\&(x \leq a \bigvee a \leq x))$, если P'' задает условную операцию.

При этом $\varnothing$ при помощи фиктивной переменной выражается через остальные операции: $\varnothing = (x \leq_? (\mathbb{R}\backslash x))$

Операция $(a \leq_? b)$ также выразима через остальные:

$(a \leq_? b) = (a \in_? (-\infty, b])$

Остальные операции не выражаются друг через друга и, следовательно, образуют базис:

- Объединение — единственная двухместная операция, способная принимать значение — одноэлементное множество. Условные операции принимают только значения $\mathbb{R}$ и $\varnothing$, и примененный к их результату одноместные операции тоже могут давать только эти значения.

- Все операции, кроме $[a, \infty)$ сохраняют множество

$\{0, \varnothing, (-\infty, 0], (0, +\infty), \mathbb{R}\}$. Аналогично операция $(-\infty, a]$ также невыразима.

- Операция разности — единственная, не сохраняющая множество $\{\{0\}, \varnothing, \mathbb{R}\}$

- $(a \in_? b)$ также невыразима через остальные операции. Теорема доказана.

Теорема 2. *все 1-выразимые в R предикаты и операции выразимы через* $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (a \in_? b), (-\infty, a], [a, +\infty), = \varnothing\}$.

Рассмотрим 1-выразимые предикаты. Без ограничения общности можно рассмотреть предикаты, заданные формулой вида

$\forall x(A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n)$,

где A_i — бескванторные формулы или их отрицания. Заметим, что предикат $x \leq x$ истинен тогда и только тогда, когда x число. Поскольку формула $\forall x(A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n)$ равносильна формуле $\forall x(((x \leq x) \rightarrow (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))\&\forall x((\neg x \leq x) \rightarrow (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n)))$, задача сводится к описанию предикатов, выражаемые формулами вида $\forall x((x \leq x) \rightarrow (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))$ и вида $\forall x((\neg x \leq x) \rightarrow (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))$

Все предикаты, выражаемые первой формулой, выразимы как $set_x(A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n) = \varnothing$. Следовательно, они выразимы над семейством $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (a \in_? b), (-\infty, a], [a, \infty), = \varnothing\}$.

Рассмотрим предикаты, выразимые формулой вида $\forall x((\neg x \leq x) \rightarrow (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))$. При этом можно считать, что все атомарные формулы A_i содержат x (иначе их можно вынести за квантор). Кроме того, зависящим от x является только значение атомарных формул вида $x_i \in x$ и их отрицаний. Следовательно, предикат, выразимый этой формулой, является проверкой существования множества, содержащего некий список элементов и не содержащего элементы из некоторого другого списка. Он выразим через проверку на принадлежность $\mathbb{R}$ ($x \in (\mathbb{R}\backslash\varnothing)$) и равенство элементов $\mathbb{R}$ ($(-\infty, a]\backslash(-\infty, b] = \varnothing\&(-\infty, b]\backslash(-\infty, a] = \varnothing)$)

Утверждение доказано.

Опишем операции, 2-выразимые над данным множеством.

Обозначим через major(a) операцию, значение которой — множество верхних граней множества a, а через minor(a) операцию, значение которой — множество его нижних граней. Определим операции $lip(a, b), rip(a, b)$, где где значение операции lip(a, b) — это множество точек, для которых расстояние до ближайшей слева точки замыкания множества a больше, чем расстояние до ближайшей слева точки замыкания b, а значение операции rip(a, b) — это множество точек, для которых расстояние до ближайшей справа точки замыкания множества a больше, чем расстояние до ближайшей справа точки замыкания множества b.

Теорема 3. *Все операции, 2-выразимые на множестве $\{\mathbb{R} \bigcup 2^{\mathbb{R}}\}$ над множеством предикатов $\{\in, \leq\}$, бескванторно выразимы над $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (-\infty, a], [a, \infty), = \varnothing, =_? \varnothing, major(a), minor(a)\}$, причём операции $major(a), minor(a)$ в бескванторном выражении не вложены друг в друга.*

Доказательство.

Все булевы функции выражаются над функциями $\{\neg, \bigvee\}$, которые можно вынести за set:

$set_x(\neg A) = \mathbb{R}\backslash A$

$set_x(A \bigvee B) = A \bigcup B$

Следовательно, достаточно рассматривать операции, выразимые термами типа $set_x(A = \varnothing)$, где A — 1-выразимый терм.

Если A не содержит x, то данный терм задаёт ту же операцию, что и терм $A =_? \varnothing$. При этом условная операция $a =_? \varnothing$, будучи добавленной к множеству $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (a \in_? b), (-\infty, a], [a, \infty), a = \varnothing\}$ позволяет бескванторно выразить условную операцию $(a \in_? b)$:

$(a \in_? b) = (b \backslash \{a\}) = \varnothing$,

где $\{a\}$, определяемая как пустое множество, если $a \in 2^{\mathbb{R}}$ — выразимая операция:

$\{a\} = (-\infty, a] \bigcap [a, \infty)$ (операция $\bigcap$ выразима естественным образом).

Рассмотрим операции, выразимые термами вида $set_x(A = \varnothing)$, где терм A содержит x.

Так как $\bigcap$ — выразимая над $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup\}$ операция, терм $set_x(A = \varnothing)$ выражает ту же операцию, что и терм

$set_x(A \bigcap \{x\} = \varnothing \& A \bigcap (x, +\infty) = \varnothing \& A \bigcap (-\infty, x) = \varnothing) = set_x(A \bigcap \{x\} = \varnothing) \bigcup set_x(A \bigcap (x, +\infty) = \varnothing) \bigcup set_x(A \bigcap (-\infty, x) = \varnothing)$.

Следовательно, достаточно рассмотреть предикаты и операции, выразимые термами видов $set_x(A \bigcap \{x\} = \varnothing)$, $set_x(A \bigcap (x, +\infty) = \varnothing)$ и $set_x(A \bigcap (-\infty, x) = \varnothing)$.

Если выражение A содержит условную операцию $(a \in b_?)$, то терм $set_x(A \bigcap \{x\} = \varnothing)$ выражает ту же операцию, что и терм

$set_x(B \bigcap \{x\} = \varnothing) \bigcap set_x((a \in b)) \bigcup (set_x(C \bigcap \{x\} = \varnothing) \bigcap (\mathbb{R} \backslash set_x(a \in b)))$,

где терм B получен из терма A путём замены всех вхождений операции $(a \in b_?)$ на $\mathbb{R}$, а терм C получен из терма A путём замены всех вхождений операции $(a \in b_?)$ на $\varnothing$

Следовательно, устранив по индукции по вложенности все вхождения условной операции, без ограничения общности можем считать, что A не содержит вхождения условной операции.

Также если в выражении встречаются операции $(-\infty, a]$ и $[a, +\infty)$, где a — произвольный терм, не являющийся символом переменной, то, поскольку результаты всех операций из найденного базиса 1-выразимых предикатов являются множествами, такие операции можно заменить на $\varnothing$.

Все вхождения переменных, кроме вхождений в операции $(-\infty, a]$ и $[a, +\infty)$, можно заменить на выражение $set(x)$, которое определяется как $x \bigcup x$, что равно пустому множеству для x, принадлежащего $\mathbb{R}$, и равно самому x, если x — множество.

Следовательно, можно считать, что A представляет собой некоторый терм, выраженный над бескванторными термами $set(a)$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ при помощи операций $(a \bigcup b)$, $(\mathbb{R} \backslash a)$. Используя равенства:

$\mathbb{R}\backslash(\mathbb{R}\backslash a) = a$ (так как a — терм, значение которого — множество, а не число)

$\mathbb{R}\backslash(b \bigcup a) = \mathbb{R}\backslash b \bigcap \mathbb{R}\backslash a$

$\mathbb{R}\backslash(b \bigcap a) = \mathbb{R}\backslash b \bigcup \mathbb{R}\backslash a$

$a \bigcap (b \bigcup c) = (a \bigcap b) \bigcup (a \bigcap c)$

получим равносильный А терм, выраженный над $set(a)$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, где a — переменная, при помощи операций $a \bigcup b$, $a \bigcap b$, $\mathbb{R}\backslash A$, где внешней операцией является первая, после неё идёт вторая, а третья является внутренней (форма, аналогичная ДНФ).

При этом поскольку $set_x((A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n) \bigcap p(x) = \varnothing)$ равно $set_x(A_1 \bigcap p(x) = \varnothing) \bigcap \cdots \bigcap set_x(A_n \bigcap p(x) = \varnothing)$, достаточно рассматривать операции, выразимые термами вида $set_x((A_1 \bigcap \cdots \bigcap A_n) \bigcap p(x) = \varnothing)$, где A_n есть одно из атомарных выражений — $set(a)$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, где a — переменная, либо $\mathbb{R}\backslash B$, где B — атомарное выражение.

Обозначим через С объединение всех A_i, которые не содержат x. Получим выражение вида $set_x(C \bigcap (A_1 \bigcap \cdots \bigcap A_n) \bigcap p(x) = \varnothing)$, где все A_1 содержат x, а $p(x)$ имеет вид $\{x\}$, $(-\infty, x)$ или $(x, +\infty)$.

При этом результат этой операции не являтся пустым множеством в том и только в том случае, если все A_i включают $p(x)$ ($\{x\}$ включают $(-\infty, x]$ и $[x, -\infty)$, $(-\infty, x)$ включают $(-\infty, x]$ и $\mathbb{R}\backslash[x, +\infty)$, $(x, +\infty)$ включают $[x, +\infty)$ и $\mathbb{R}\backslash(-\infty, x]$ — то есть включение определено на формальных выражениях-термах, и не зависит от значения x). В этом случае терм равносилен терму $set_x(C \bigcap p(x) = \varnothing)$.

Терм $set_x(C \bigcap \{x\} = \varnothing)$ равносилен терму $\mathbb{R}\backslash$.

Терм $set_x(C \bigcap (x, +\infty) = \varnothing)$ равносилен терму $major(C)$

Терм $set_x(C \bigcap (-\infty, x) = \varnothing)$ равносилен терму $minor(C)$

Утверждение доказано.

Найдём все предикаты, 2-выразимые на множестве $\{\mathbb{R} \bigcup 2^{\mathbb{R}}\}$ над множеством операций $\{\in, \leq\}$. В дальнейшем для обозначения предиката "x n-элементно"будем использовать обозначение $Crd_n(x)$, для обозначения операции, выразимой термом "set_y(x n-элементно)"как $Card_n(x)$. Эта операция принимает значение $\mathbb{R}$, если x n-элементно, и $\varnothing$ в проивном случае.

Теорема 4. *Все предикаты и операции, 2-выразимые на множестве $\{\mathbb{R} \bigcup 2^{\mathbb{R}}\}$ над множеством предикатов $\{\in, \leq\}$, бескванторно выразимы над $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (-\infty, a], [a, \infty), = \varnothing, =_? \varnothing, major(a), minor(a)\}$.*

Все предикаты и операции, 2-выразимые на множестве $\{\mathbb{R} \bigcup 2^{\mathbb{R}}\}$ над множеством предикатов $\{\in, \leq\}$, бескванторно выразимы над $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (-\infty, a], [a, \infty), = \varnothing, =_? \varnothing, major(a), minor(a),$ $Crd_n(a)\}$, причём выражение не содержит вложенных друг в друга операций вида $major(a), minor(a)$ и не содержит этих операций и предикат проверки на одноэлементность одновременно.

Доказательство.

Как и прежде, поскольку $\forall x((x \leq x) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))$

$=set_x(A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n)$ достаточно рассмотреть выразимость предикатов, задаваемых формулой вида $\forall x((\neg x \leq x) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))$, где A_n — 1-выразимый предикат, внешняя операция которого — $= \varnothing$ (поскольку это единственный предикат из базиса 1-выразимых предикатов и операций), и при этом все A_i содержат x.

Как и прежде, от вхождения условной операции $a \in_? b$ можно избавиться, добавив предикат $\in$. Действительно, $A = B\&(a \in b) \bigvee C\&(\neg a \in b)$, где формула B получается из A путём замены всех вхождений $a \in_? b$ на $\mathbb{R}$, а формула C получается из A путём замены всех вхождений $a \in_? b$ на $\varnothing$. По индукции по вложенности и числу предикатов можно доказать наличие равносильного A предиката, не содержащего $\in$, но содержащего $\in$.

Также как и ранее, без ограничения общности можно считать, что x не входит в качестве переменной ни в одну операцию $(-\infty, x)$ и $(x, +\infty)$ (так как x — множество). Более того, без ограничения общности можно считать, что в эти операции входят только переменные. Обозначив данные операции над свободными переменными за новые переменные ($y_i = (-\infty, x_i]$, $z_i = (x_i, +\infty)$), получим кванторный предикат над $\bigcap, \bigcup, \in, \mathbb{R}\backslash$.

По доказанному для U_1 в статье [1] утверждению, в этом случае данная формула выразима через операции $\bigcap, \bigcup, \in, \mathbb{R}\backslash$ и предикаты n-элементности (из доказательства утверждения для U_1 следует, что выразим лишь предикат (0+0+1)-элементности, то есть одноэлементности). При обратной замене новых переменных y_i и z_i на их значения к этому списку добавятся предикаты $y_i = (-\infty, x_i]$, $z_i = (x_i, +\infty)$.

Следовательно, к системе, выражающей все 2-выразимые предикаты и 1-выразимые предикаты и операции добавляется только предикат одноэлементности. Но он 1-выразим формулой $(\neg x = \varnothing \& x \backslash (major(x) \bigcap minor(major(x))) = \varnothing)$. Утверждение доказано.

Рассмотрим все 3-выразимые операции.

Теорема 5. *Все 3-выразимые в R над $\{\leq, \in\}$ операции выразимы над* $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (-\infty, a], [a, \infty), =_? \varnothing, major(a), minor(a), lip(A, C), rip(A, C)\}$

Как и прежде, достаточно рассматривать операции, выразимые термами типа $set_x(A = \varnothing)$, и $set_x(Crd_1(A))$, где A — 2-выразимый терм.

Если A не содержит x, то терм $set_x(A = \varnothing)$ задаёт ту же операцию, что и терм $A =_? \varnothing$, а терм $set_x(Crd_1(A))$ — ту же операцию, что и терм $Card_1(A) = \varnothing_?$ — выразимый над $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (-\infty, a], [a, \infty), =_? \varnothing, major(a), minor(a)\}$ терм.

Так же, как и при поиске системы операций, выражающих все 2-выразимые предикаты, без ограничения общности можно считать, что А не содержит вхождения условной операции, а также что операции $[a,+\infty)$ и $(-\infty,a]$ применены только к переменным.

Если 3-выразимая операция задаётся термом $set_x(Crd_1(A))$, то терм А не содержит операций minor и major. В этом случае А выражается через $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, a =_? \varnothing, Crd_1(a)\}$ над x_i, $y_i = (-\infty, x_i]$, $z_i = [x_i, +\infty)$. Из теоремы для U_1 следует, что оператор $set_x(A = \varnothing)$ бескванторно выразим над этими операциями и условными операциями n-элементности $Card_n$. При этом эти условные операции выразимы над операциями $=_? \varnothing$. Также они выразимы над операциями $minor$ и $major$ и $\backslash$. Это верно, поскольку значение $minor(major(a)) \bigcap major(a)$ есть точная верхняя грань а, и операция $Card_n(x)$ выражается рекурсивно:

$Card_n(x) = Card_{n-1}(x \backslash sup(x))$

Рассмотрим операции, выразимые термами вида $set_x(A = \varnothing)$, где терм A содержит x. Из утверждения 4, а также того, что $A = \varnothing$ 2-выразимая операция следует, что А не содержит вложенных друг в друга операций $minor$ и $major$.

Как и в случае 2-выразимости, достаточно рассмотреть предикаты и операции, выразимые термами видов $set_x(A \bigcap \{x\} = \varnothing)$, $set_x(A \bigcap (x, +\infty) = \varnothing)$ и $set_x(A \bigcap (-\infty, x) = \varnothing)$. Аналогично случаю 2-выразимости доказывается, что достаточно рассматривать предикаты и операции вид $set_x((A_1 \bigcap \cdots \bigcap A_n) \bigcap p(x) = \varnothing)$, где A_i — одно из атомарных выражений — $set(a)$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, где а — переменная, либо $\mathbb{R} \backslash B$, где В — атомарное выражение или операция с внешней операцией $major$ или $minor$, и операндом, выразимым над $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (a \in_? b), (-\infty, a], [a, \infty), = \varnothing\}$.

Если $p(x)$ имеет вид $\{x\}$, то $set_x((A_1 \bigcap \cdots \bigcap A_n) \bigcap \{x\} = \varnothing) = set_x(A_1 \bigcap \{x\} = \varnothing) \bigcap \cdots \bigcap set_x(A_1 \bigcap \{x\} = \varnothing)$ При этом $set_x(A_1 \bigcap \{x\} = \varnothing) = \mathbb{R}\backslash$, следовательно, в этом случае операция 2-выразима.

Рассмотрим случай $p(x) = (x; +\infty)$. Аналогично доказательству случая 2-выразимости можно избавиться от всех A_i, содержащих x и не имеющих внешней операции $minor$ или $major$. Также обозначим $C = A_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap A_{i_n}$, где $A_{i_1} \ldots A_{i_n}$ — все A_i, содержащие x.

Получим равносильный исходному терму терм $set_x((B_1 \bigcap \cdots \bigcap B_n) \bigcap C \bigcap \{x\} = \varnothing)$, где терм С не содержит x, а все термы B_i содержат его, имеют внешнюю операцию $minor$ или $major$ и выражаются через $\bigcap, \mathbb{R}\backslash, \bigcup$ над переменными и термами вида $[a, +\infty)$, $(a, -\infty]$

Заменим каждый терм B_i на равносильный терм, в котором внешняя операция — $\bigcup$, затем идёт $\bigcap$, а затем — $\mathbb{R}\backslash$. Пользуясь тем, что $minor(A \bigcup B) = minor(A) \bigcap minor(B)$, вынесем операцию $\bigcup$ за скобки (и, если необходимо, снова объединим все операнды пересечения, не содержащие x).

После этого каждый терм B_i будет иметь или вид

$major(D_{i1} \bigcap \cdots \bigcap D_{in})$, или $minor(D_{i1} \bigcap \cdots \bigcap D_{in})$. Как и раньше, объединим операнды, не содержащие x. Тогда все B_i будут иметь вид $major(E_i \bigcap D_{i1} \bigcap \cdots \bigcap D_{in})$ или $minor(D_{i1} \bigcap \cdots \bigcap D_{in})$.

Далее, для каждого B_i $D_{i1} \bigcap \cdots \bigcap D_{in}$ включает(в указанном ранее смысле) или не включает $\{x\}, (x, +\infty), (-\infty, x)$. Кроме того, для каждого B_i $set_x(O)$ можно выразить как $(set_x(O) \bigcap E_i) \& (set_x(O) \bigcap (\mathbb{R} \backslash E_i))$. При работе с первой условной операцией можно считать, что $x \in E_i$, при работе со второй — что $\neg x \in E_i$ (так как $(set_x(O) \bigcap E_i) = set_x(O \& x \in E_i), (set_x(O) \bigcap (\mathbb{R} \backslash E_i)) = set_x(O \& \neg(x \in E_i))$. Аналогично каждый полученный set можно разложить дальше — $(set_x(O) \bigcap minor(E_i)) \& (set_x(O) \bigcap (\mathbb{R} \backslash minor(E_i)))$, и при работе с первым термом можно считать, что $(-\infty, x)$ не пересекается с E_i, а при работе со вторым — что пересекается. Аналогичное разложение проведём и для $major(x)$).

В таком случае про выражение, входящее во внешнюю операцию в каждом B_i при соответствующих условиях можно будет сказать, содержит ли он x и хоть один элемент $(x, +\infty)$ и $(-\infty, x)$.

Для каждого B_i рассмотрим его внешнюю операцию. Если она $major$, то:

- В случае, если операнд внешней операции B_i не содержит элементов, больших x, то он может быть исключён из дизъюнкции, так как в этом случае пересечение B_i с $(x, +\infty)$ равно $(x, +\infty)$

- В случае, если операнд внешней операции B_i содержит элементы, большие x, то его можно заменить на соответствующее выражение $major(E_i)$, не содержащее x, и добавить к C.

Если внешняя операция B_i — minor, то:

- В случае, если операнд внешней операции B_i не содержит элементы, меньшие x, то вся дизъюнкция равна пустому множеству, так как в этом случае результат B_i включается в $(-\infty; x]$ и не пересекается с $(x; +\infty)$.

- В случае, если операнд внешней операции B_i содержит элементы, меньшие x, то его можно заменить на соответствующее выражение $minor(E_i)$, не содержащее x, и добавить к C.

Осталось выразить операции, задаваемые только теми термами B_i, которые имеют внешнюю операцию minor и содержат только элементы, большие x. Воспользовавшись равенством

$minor(a) \bigcap minor(b) = minor(a \bigcap b)$, приведём терм к виду:

$set_x((minor(A \bigcap (x, +\infty)) \bigcap C \bigcap (x, +\infty)) = \varnothing)$

Данная операция была обозначена как $lip(A, C)$ — это множество точек, для которых расстояние до ближайшей справа точки замыкания множества A выше, чем расстояние до ближайшей справа точки замыкания C. Например, в случае $C=\mathbb{R}$ это множество правых предельных точек.

Аналогично доказывается, что в случае $p = (-\infty, x)$ операция, выразимая термом $set_x(A\bigcap p = \varnothing)$, бескванторно выразима через $\{\mathbb{R}\backslash, \bigcup, (-\infty, a], [a, \infty), =_? \varnothing, major(a), minor(a),$ $lip(A, C), rip(A, C)\}$ Теорема доказана.

4. Бескванторная выразимость на множестве $\mathbb{N}\bigcup 2^{\mathbb{N}}$ с сигнатурой $\{\in, \leq\}$

Рассмотрим множество $N{=}\mathbb{N}\bigcup 2^{\mathbb{N}}$ с естественным образом определенной на нем сигнатурой $\{\in, |\}$. При этом считаем предикат $|$ принимающим ложные значения всегда, когда он применен не к двум числам, а предикат $\in$ ложным всегда, когда первый операнд — не число или второй операнд — не множество. Для данного множества будем интерепретировать $set_x(P)$, как $\{y\in\mathbb{N} : P(y) =$И$\}$.

Будем послойно изучать предикаты и операции, n — выразимые над $\mathbb{N}$.

Определим на натуральных числах и множествах натуральных числах операции div(x), mod (x), sidiv (x), simod (x), int (x) , где значение операции div(x) — множество делителей x, mod (x) — множество кратных x, sidiv (x) — объединение собственных делителей элементов множества x, simod (x) — объединение собственных кратных элементов множества x, int (x) — множество чисел, являющихся для каждого элемента множества x или делителем, или кратным. Для тех x, для которых значение операций не определено корректно (например, div(x), если x — множество чисел, а не число), значение операции равно $\varnothing$.

Теорема 6. *все 1-выразимые в N предикаты и операции выразимы через* $\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup, (a \in_? b), div(a), mod(a), = \varnothing, \}$.

Начнем с операций, выразимых на первом слое. Термы, которыми они задаются, имеют вид:

$set_x(P(A_i(x, x_1, \ldots, x_n)))$, где:

P -формула, задающая некоторую булеву функцию.

A_i — бескванторные операции вида $x_i|x_j$ и $x_i \in x_j$

Булеву функцию, задающую P, можно выразить в базисе $\{\neg, \bigvee\}$. Используя равенства:

$set_x(\neg P) = \mathbb{N}\backslash(set_x(P))$

$set_x(P\bigvee Q) = (set_x(P))\bigcup(set_x(Q))$

преобразуем терм к равносильному терму, выразимому над термами вида $set_x(A_i)$ и операциями $\bigcup$ и $\mathbb{N}\backslash$, где A_i — бескванторный терм.

Рассмотрим операции, выразимые термами $set_x(A_i)$:

$set_x(a \in b) = (a \in_? b)$ — условная операция, равная $\mathbb{N}$, если $a \in b$, и $\varnothing$ иначе.

$set_x(a|b) = (a|_?b)$ — условная операция, равная $\mathbb{N}$, если $a|b$, и $\varnothing$ иначе.

$set_x(x|a)$ — множество кратных a. Обозначим данную операцию как $mul(a)$ (её результат считаем равным $\varnothing$, если a — множество)

$set_x(a|x)$ — множество делителей a. Обозначим данную операцию как $div(a)$ (её результат считаем равным $\varnothing$, если a — множество)

$set_x(x \in a) = a$. Получается тождественная операция, суперпозиция которой ничего не добавляет.

$set_x(a \in x) = \varnothing$.

При этом $(a|_?b) = (a \in_? mul(b))$, $\varnothing = (\mathbb{N} \backslash (x \bigcup (\mathbb{N} \backslash x)))$

Рассмотрим 1-выразимые предикаты. Без ограничения общности можно рассмотреть предикаты, заданные формулой вида $\forall x(A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n)$, где A_i — бескванторные формулы или их отрицания. Так как предикат $x|x$ проверяет, является ли x числом, и формула $\forall x(A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n)$ равносильна формуле $\forall x(((x|x) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))\&\forall x((\neg x|x) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n)))$, можно рассматривать отдельно предикаты, выражаемые формулами вида $\forall x((x|x) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))$ и вида $\forall x((\neg x|x) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))$

Все предикаты, выражаемые первой формулой, выразимы как $set_x(A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n) = \varnothing$. Следовательно, они выразимы над семейством $\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup, (a \in_? b), div(a), mul(a), = \varnothing\}$.

Рассмотрим предикаты, выразимые формулой вида $\forall x((\neg x|x) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))$. При этом можно считать, что все атомарные формулы содержат x (иначе их можно вынести за квантор). Кроме того, нетривиальным является только значение атомарных формул вида $x_i \in x$ и их отрицаний. Следовательно, этот предикат является проверкой существования множества, содержащего некий список элементов и не содержащего элементы из некоторого другого списка, и выразим через проверку на принадлежность $\mathbb{N}$ $(x \in (\mathbb{N} \backslash \varnothing))$ и равенство элементов $\mathbb{N}$ $(div(a) \backslash div(b) = \varnothing \& div(b) \backslash div(a) = \varnothing))$

Утверждение доказано.

Теорема 7. *Все 2-выразимые в N операции выразимы над множеством операций*

$\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup, div(a), mod(a), a =_? \varnothing, int(B), sidiv(B), simod(B)\}$,

причём три последних операции в выражающем терме не вложены друг в друга.

Доказательство.

Рассмотрим операции, 2-выразимые над обозначенным набором операций. Так как все булевы функции выражаются над $\{\neg, \bigvee\}$, и верны равенства:

$set_x(\neg a) = \mathbb{N} \backslash set_x(a)$ и

$set_x(a \bigvee b) = set_x(b) \bigcup set_x(a)$, тотакие операции бескванторно выражаются через операции вида:

$set_x(A)$, где А — формула, выраженная над $\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup, (a \in_? b), div(a), mod(a), = \varnothing\}$, не содержащая булевых операций. Так как $= \varnothing$ — единственный предикат в указанном множестве, то достаточно рассматривать предикаты, выразимые формулой вида $set_x(A = \varnothing)$

Если A не содержит x, то данный терм задаёт ту же операцию, что и терм $A =_? \varnothing$

Также аналогично выразимости в $\mathbb{R}$ можно считать, что А не содержит условных операций. Действительно, $set_x(A) = set_x(B\&(a \in b)) \bigcup set_x(C\&\neg(a \in b))$, где терм В получен из А путём замены терма $(a \in b)$ на $\mathbb{N}$ (выразимая операция, равная $\mathbb{N}\backslash\varnothing$, где $\varnothing$ бескванторно выразимо без использования условной операции), терм С получен из терма А путём замены терма $(a \in b)$ на $\varnothing$.

Аналогично случаю выразимости в $\mathbb{R}$ можем считать, что в формуле А операции mul() и div() применяются только к переменным, так как вхождения тех из них, которые применены не к переменным можно заменить на $\varnothing$, не меняя значения формулы.

Следовательно, можно рассматривать предикаты и операции, выразимые с помощью термов вида $set_x(A = \varnothing)$, где А — терм над $\mathbb{N}\backslash, \bigcup, x, x_i, div(x), div(x_i),$
$mul(x), mul(x_i)$. Как было показано в главе про $\mathbb{R}$, его можно выразить над $\mathbb{N}\backslash, \bigcup, \bigcap, x, x_i,$
$, div(x), div(x_i), mul(x), mul(x_i)$ таким образом, что наружной операцией будет $\bigcup$, затем будет идти $\bigcap$, затем — $\mathbb{N}\backslash$, и применяться эти операции будут к $x, x_i, div(x), div(x_i), mul(x), mul(x_i)$ (некоторые операции в цепочке вложенностей могут отсутствовать). Так как $set_x(A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n = \varnothing) = set_x(A_1 = \varnothing) \bigcap \cdots \bigcap set_x(A_n = \varnothing)$, можно рассматривать те термы, для которых внешняя операция $\bigcup$ отсутствует.

Так как $\mathbb{N} = (mul(x)\backslash x) \bigcup x \bigcup (div(x)\backslash x) \bigcup (\mathbb{N}\backslash div(x)\backslash mul(x))$, то $set_x(B = \varnothing)$ можно заменить на $set_x(B \bigcap (\mathbb{N}\backslash div(x)\backslash mul(x)) = \varnothing) \bigcap set_x(B \bigcap (x) = \varnothing) \bigcap (B \bigcap div(x)\backslash x) \bigcap (B \bigcap mod(x)\backslash x)$, где В — терм над $x, x_i, div(x), div(x_i), mul(x), mul(x_i)$ как переменными с внешней операцией $\bigcap$ и внутренней $\mathbb{N}\backslash$. Пусть она имеет вид $C_1 \bigcap \cdots \bigcap C_n$

Аналогично случаю $\mathbb{R}$, про все C_i, содержащие х, можно сказать, включают ли они в себя результат соответствующей операции над х $((mul(x)\backslash x), x, (div(x)\backslash x), (\mathbb{N}\backslash div(x)\backslash mul(x)))$, а объединение C_i, не содержащих x, обозначить как D. Следовательно, исходный терм бескванторно выражается над термами вида $set_x(B \bigcap p(x) = \varnothing)$, где $p(x)$ — один из термов $(mul(x)\backslash x), x, (div(x)\backslash x), (\mathbb{N}\backslash div(x)\backslash mul(x))$, а B — 1-выразимый терм над свободными переменными.

Имеем: $set_x(B \bigcap x = \varnothing) = B$ $set_x(B \bigcap (mul(x)\backslash x) = \varnothing) = \mathbb{N}\backslash sidiv(B)$ $set_x(B \bigcap (div(x)\backslash x) = \varnothing) = \mathbb{N}\backslash simod(B)$ $set_x(B \bigcap (\mathbb{N}\backslash div(x)\backslash mul(x)) = \varnothing) = int(B)$

Следовательно, все 2-выразимые в N операции выразимы над $\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup,$
$div(a), mod(a), a =_? \varnothing, int(B), sidiv(B), simod(B)\}$.

Также заметим, что $(a \in_? b)$ выразима над $\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup, (a \in_? b), div(a), mod(a), a =_? \varnothing, int(B), sidiv(B), sidiv(B)\}$:

$(a \in_? b) = (b\backslash(\mathbb{N}\backslash((\mathbb{N}\backslash div(a)) \bigcup (\mathbb{N}\backslash mul(a)))) = \varnothing$,

следовательно, её можно исключить из множества операций, необходимых для бескванторного выражения всех 2-выразимых операций.

Утверждение доказано.

Например, к 2-выразимым операциям относятся $cd(A)$ — множество общих делителей A ($cd(A) = int(A)\backslash simod(A)$), $cm(A)$ — множество общих кратных A ($cm(A) = int(A)\backslash sidiv(A)$), $ud(A)$ — объединение множеств делителей элементов A $= ud(A) \bigcup A$, $um(A)$ — объединение множеств кратных элементов A $= um(A) \bigcup A$. Однако в утверждении теоремы заменить операции $int(B), sidiv(B), simod(B)$ на более естественные нельзя — ни одна из них не выразима над множеством $\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup, a =_? \varnothing, int(B), sidiv(B), simod(B), cd(B), cm(B), ud(B), um(B)\}$ с исключённой этой операцией бескванторной формулой, в которой последние семь операций не вложены друг в друга.

Заметим что, если первые три операции применить к множеству которое или содержит некоторые два заданных элемента, или их не содержат, то результат операции не может содержать ровно один из этих элементов. Приведём примеры множеств и двух чисел, шесть из последних семи последних операций, применённых к которому (а также к его дополнению) будут содержать или оба этих числа, или ни одного, а седьмая будет содержать ровно одно это число.

Пример 1 Рассмотрим $B = \{2, 4, 8, 9\}$ и числа 2,4. Тогда $int(B), sidiv(B), ud(B)$,
$um(B)$ содержат оба этих числа, $cd(B), cm(B)$ — ни одного из этих чисел, а $simod(B)$ содержит 2, но не 4. Также $sidiv(\mathbb{N}\backslash B), ud(\mathbb{N}\backslash B), um(\mathbb{N}\backslash B)$ содержат оба этих числа, а $cd(\mathbb{N}\backslash B), cm(\mathbb{N}\backslash B), int(\mathbb{N}\backslash B)$ — нет. При применении этих операций к $\mathbb{N}$ и $\varnothing$ также результат или будет содержать и 2, и 4, или не будет содержать ни одного из чисел. Следовательно, $simod(B)$ не выражается над $\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup, a =_? \varnothing, int(B), sidiv(B), cd(B), cm(B), ud(B), um(B)\}$ термом, в котором шесть последних операций не вложены друг в друга.

Пример 2 Аналогичный пример с $B = \{2,4,8,9\}$ и выбранными числами 8, 4 показывает, что операция $sidiv(B)$ не выражается над

$\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup, a =_? \varnothing, int(B), simod(B), cd(B), cm(B), ud(B), um(B)\}$

термом, в котором шесть последних операций не вложены друг в друга.

Пример 3 Рассмотрим $B = \{2,3,12\}$ и числа 4, 6. Тогда $sidiv(B), simod(B)$,
$ud(B), um(B)$ содержат оба этих числа, $cd(B), cm(B)$ — ни одного из этих чисел, а $int(B)$ содержит 6, но не 4. Также $sidiv(\mathbb{N}\backslash B), simod(\mathbb{N}\backslash B), ud(\mathbb{N}\backslash B)$,
$um(\mathbb{N}\backslash B)$ содержат оба этих числа, а $cd(\mathbb{N}\backslash B), cm(\mathbb{N}\backslash B)$ — нет. При применении этих операций к $\mathbb{N}$ и $\varnothing$ также результат или будет содержать и 6, и 4, или не будет содержать ни одного из чисел. Следовательно, $int(B)$ не выражается над $\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup, a =_? \varnothing, simod(B), sidiv(B)$,
$cd(B), cm(B), ud(B), um(B)\}$ термом, в котором шесть последних операций не вложены друг в друга.

Найдём все предикаты, 2-выразимые на множестве $\{\mathbb{N} \bigcup 2^{\mathbb{N}}\}$ над множеством предикатов $\{\in, |\}$.

Теорема 8. *Все 2-выразимые в N предикаты выразимы над* $\{\mathbb{N}\backslash, \bigcup$,
$div(a), mod(a), a =_? \varnothing, int(B), sidiv(B), simod(B), a = \varnothing\}$, *причём три последних операции в выражающем терме не вложены друг в друга.*

Доказательство: Аналогично случаю с алгебраической системой $\mathbb{R}$, поскольку $\forall x((x \leq x) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n)) = set_x(A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n)$, достаточно рассмотреть выразимость предикатов, задающих существование удовлетворяющего условию множества x (не числа). То есть задаваемых формулой вида

$\forall x((\neg x \leq x) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))$, где A_n — 1-выразимый предикат, внешняя операция которого — $= \varnothing$ (поскольку это единственный предикат из базиса 1-выразимых предикатов и операций), и при этом все A_i содержат x. Кроме того, можно считать, что x не входит в операции mul(x) и div(x), а также что в них входят только переменные (то есть mul и div не имеют вложенных операций). Обозначив данные операции над свободными переменными за новые переменные ($y_i = mul(x_i)$, $z_i = div(x_i)$), получим кванторный предикат над $\bigcap, \bigcup, \in, \mathbb{N}\backslash$.

По доказанному в статье [1] для U_1 утверждению в этом случае данная формула выразима через операции $\bigcap, \bigcup, \in, \mathbb{N}\backslash$ и предикат 1-элементности. При обратной замене новых переменных y_i и z_i на их значения к этому списку добавятся предикаты $y_i = mul(x_i)$, $z_i = div(x_i)$.

Следовательно, к системе, выражающей все 2-выразимые предикаты и 1-выразимые предикаты и операции добавляется только предикат одноэлементности. Но он 1-выразим формулой $(x\backslash int(x) = \varnothing$ $\& int(x)\backslash x = \varnothing \& x \bigcap sidiv(x) = \varnothing \& x \bigcap simul(x) = \varnothing)$, не содержащей вложенных друг в друга операций $simul, sidiv, int$. Следовательно, утверждение теоремы доказано.

5. Бескванторная выразимость на множестве $B^n \bigcup 2^{B^n}$ с сигнатурой $\{\in, \leq\}$

Пусть B^n — n-мерный булев куб, на элементах которого естественным образом задан порядок <=. Рассмотрим множество $\mathbb{B}=B^n \bigcup 2^{B^n}$. Как и ранее, будем определять $set_n(P)$ как множество элементов булева куба, удовлетворяющих условию P.

Если считать число n известным, то ввиду конечности множества задача выразимости тривиальна — формульно выразимы те и только те предикаты и операции, принимающие значения-множества, которые сохраняются при любом автоморфизме куба. (Действительно, рассмотрим формулу вида $\exists a_1, \dots, a_{n+2^n}$

(Все соотношения принадлежности и неравенства, верные для булева куба & Все возможные значения свободных переменных,

удовлетворяющие формуле). Аналогичное построение можно совершить для предикатов, используя выразимость для операции $p(a_1, \dots a_n)$ формулы $p'(a_1, \dots, a_n, b)$, истинной в том и только том случае, если

$b \in p(a_1, \dots a_n))$

Однако заслуживающей рассмотрения является задача поиска предикатов и операций, определённых и выразимых одной формулой или одним термом для булева куба любой размерности.

Поскольку булев куб с отношением порядка изоморфен подмножеству натуральных чисел (а именно, если рассмотреть n простых чисел $p_1 \dots p_n$, то n-мерному булеву кубу изоморфно подмножество всех чисел, каждый в степени не более 1), предикаты и операции, n-выразимые над множеством натуральных чисел, будут также выразимы и над булевым кубом.

Определим на точках булева куба и их множествах операции $^*a$, a^*, $^{**}a$, a^{**}, $int(a)$. Здесь значение операции *а — множество точек, меньших а, операции а* — множество точек, больших а, $**a$ — множество точек, меньших хоть одного элемента а, a^{**} — множество точек, больших хоть одного элемента а, $int(a)$ — множество точек, сравнимых с каждым элементом множества а. Для тех а, для которых значение операций не определено корректно, значение операции равно $\varnothing$.

Полностью аналогично случаю натуральных чисел доказываются следующие утверждения:

Теорема 9. *все 1-выразимые в* $\mathbb{B}$ *операции выразимы через* $\{B^n\backslash, \bigcup, (a \in_? b),^* a, a^*, = \varnothing, \}$.

, где $^*a := set_x(x \leq a), a^* := set_x(x \geq a)$

Теорема 10. *Все 2-выразимые в* $\mathbb{B}$ *предикаты и операции выразимы над* $\{B^n\backslash, \bigcup,$
$*x, x*, x =_? \varnothing, x = \varnothing, int(x),^{**} x, x^{**}\}$, *причём три последних операции в выражающем терме или формуле не вложены друг в друга.*

Теорема 11. *все 2-выразимые в* $\mathbb{B}$ *операции выразимы над* $\{B^n\backslash, \bigcup,$ $^*a, a^*, a =_? \varnothing, int(x),^{**}x, x^{**}\}$.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим операции, 2-выразимые над обозначенным набором операций. Так как все булевы функции выражаются над $\{\neg, \bigvee\}$, и верны равенства:

$set_x(\neg a) = \mathbb{B}\backslash set_x(a)$ и

$set_x(a \bigvee b) = set_x(b) \bigcup set_x(a)$, то такие операции бескванторно выражаются через $B^n\backslash, \bigcup$ и операции вида:

$set_x(A)$, где A — формула, выраженная над $\{\mathbb{B}\backslash, \bigcup, (a \in_? b),^* a, a^*, = \varnothing, \}$, не содержащая булевых операций. Так как $= \varnothing$ — единственный предикат в указанном множестве, то достаточно рассматривать предикаты, выразимые формулой вида $set_x(A = \varnothing)$

Если A не содержит x, то данный терм задаёт ту же операцию, что и терм $A =_? \varnothing$

Также аналогично выразимости в $\mathbb{R}$ можно считать, что A не содержит условных операций и в формуле A операции $^*a$ и a^* применяются только к переменным, так как вхождения тех из них, которые применены не к переменным можно заменить на $\varnothing$, не меняя значения формулы.

Следовательно, можно рассматривать предикаты и операции, выразимые с помощью термов вида $set_x(A = \varnothing)$, где A — терм над $\mathbb{B}\backslash, \bigcup, x, x_i,^* x,^* x_i,^* x,^* x_i$. Как было показано в разделе про $\mathbb{R}$, его можно выразить над $\mathbb{B}\backslash, \bigcup, \bigcap, x, x_i, div(x), div(x_i), mul(x), mul(x_i)$ таким образом, что наружной операцией будет $\bigcup$, затем будет идти $\bigcap$, затем — $\mathbb{B}\backslash$, и применяться эти операции будут к $x, x_i,^* x,^* x_i, x^*, x_i^*$ (некоторые операции в цепочке вложенностей могут отсутствовать). Так как $set_x(A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n = \varnothing) = set_x(A_1 = \varnothing) \bigcap \cdots \bigcap set_x(A_n = \varnothing)$, можно рассматривать те термы, для которых внешняя операция $\bigcup$ отсутствует.

Так как $B^n = (x^*\backslash x) \bigcup x \bigcup (^*x\backslash x) \bigcup (B^n\backslash^* x\backslash x^*)$, то $set_x(A = \varnothing)$ можно заменить на $set_x(A \bigcap (\mathbb{B}\backslash^* x\backslash x^*) = \varnothing) \bigcap set_x(A \bigcap (x) = \varnothing) \bigcap (A \bigcap^* x\backslash x) \bigcap (A \bigcap x^*\backslash x)$, где A — терм над $x, x_i,^* x,^* x_i, x^*, x_i^*$ как переменными с внешней операцией $\bigcap$ и внутренней $\mathbb{B}N\backslash$. Пусть она имеет вид $C_1 \bigcap \cdots \bigcap C_n$

Аналогично случаю $\mathbb{N}$, про все C_i, содержащие x, можно сказать, включают ли они в себя результат соответствующей операции над x: $(((x^{**})\backslash x), x, ((^{**}x)\backslash x), (\mathbb{B}\backslash(^{**}x)\backslash(x^{**})))$, а объединение C_i, не содержащих x, обозначить как D. Следовательно, исходный терм бескванторно выражается над термами вида $set_x(A \bigcap p(x) = \varnothing)$, где $p(x)$ — один из термов $((x^{**})\backslash x), x, ((^{**}x)\backslash x), (\mathbb{B}\backslash(^{**}x)\backslash(x^{**}))$, а A — 1-выразимый терм над свободными переменными.

Имеем: $set_x(A \bigcap x = \varnothing) = A$ $set_x(A \bigcap (x^*)\backslash x) = \varnothing) = B^n\backslash^{**}A$. $set_x(A \bigcap (^*x\backslash x) = \varnothing) = B^n\backslash A$. $set_x(A \bigcap (B^n\backslash^* x\backslash x^*) = \varnothing)$=$int(A)$.

Аналогично случаю $\mathbb{N}$ $(a \in_? b)$ выразима над остальными операциями, и её можно исключить из множества операций, необходимых для бескванторного выражения всех 2-выразимых операций.

Следовательно, все 2-выразимые операции выразимы над $\{B^n\backslash, \bigcup$, $^*a, a^*, a =_? \varnothing, int(x), ^{**}x, x^{**}\}$. Теорема доказана.

6. Бескванторная выразимость на множестве U_2 с сигнатурой $\{\in\}$

Рассмотрим множества $U_0 = \mathbb{Z}$, U_1=$U_0 \bigcup 2^{U_0}$, U_2=$U_1 \bigcup 2^{U_1}$. На элементах множества U_2 естественным образом определена операция $a \in b$. Для данного множества будем интерепретировать $set_x(P)$, как $\{y \in \mathbb{U}_{\not\vDash} : P(y) =$И$\}$.

Будем послойно изучать предикаты и операции, n — выразимые над U_2.

Рассмотрим операции, выразимые на первом слое, то есть термами вида $set_x(P)$, где P — бескванторно выразим над $\in$. Аналогично разобранным случаям, операция, заданная данным термом, бескванторно выразима над термами вида $set_x(A_i)$ и операциями $\bigcup$ и $U_1\backslash$, где A_i — бескванторный терм.

Рассмотрим операции, выразимые термами $set_x(A_i)$:

$set_x(a \in b) = (a \in_? b)$ — условная операция, равная U_1, если $a \in b$, и $\varnothing$ иначе.

$set_x(x \in a) = a$. Получается тождественная операция, суперпозиция которой ничего не добавляет.

$set_x(a \in x)$ — это множество всех множеств из U_1, содержащих а. Обозначим эту операцию через a^*. В случае, если $\neg(a \in \mathbb{Z})$, её значение примем равным $\varnothing$.

Следовательно, все операции, выразимые на первом уровне над U_2 над операцией $\in$, бескванторно выражаются над $\{U_1\backslash, \bigcup, (a \in_? b), a^*\}$. При этом в данном случае не все операции, бескванторно выразимые через данные, 1-выразимы.

Напимер, рассмотрим операцию $((U_1\backslash b) \in_? c)$. Она является 1-выразимой, но не равна тождественно $\varnothing$, так как множества могут быть элементами множеств. Например, результат этой операции равен U_2 в случае, если $b = U_1$, $c = \{\varnothing\}$.

Следовательно, доказано утверждение:

Теорема 12. *все 1-выразимые в U_2 операции выразимы через* $\{U_1\backslash, \bigcup, (a \in_? b), a^*\}$.

Рассмотрим 1-выразимые предикаты. Аналогично разобранным выше случаям, можно рассматривать предикаты вида $\forall x(((x \in U_1) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))\&\forall x((\neg x \in U_1) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n)))$. Предикат, задаваемый формулой $\forall x(((x \in U_1) \to (A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n))$ равносилен предикату, задаваемому формулой $\neg(set_x(A_1 \bigvee \cdots \bigvee A_n) = \varnothing)$. Второй предикат есть предикат существования множеств, содержащих некоторый набор элементов, и не содержащих некий другой набор элементов, и выражается через $=$ и $\in U_1$. Поскольку $x = y \equiv ((x^*)\backslash(y^*) = \varnothing\&(y^*)\backslash(x^*) = \varnothing\&y\backslash x = \varnothing\&y\backslash x = \varnothing$, доказано утверждение:

Теорема 13. *все 1-выразимые в U_2 предикаты и операции выразимы через* $\{U_1\backslash, \bigcup$,
$(a \in_? b), a^*, = \varnothing\}$.

Опишем все 2-выразимые в U_2 предикаты. Аналогично разобранным ранее случаям, можно считать, что * применена только к переменным. Как и ранее, от вхождений операции $(a \in b_?)$ можно избавиться, но в этом случае необходимо добавить операцию $\in$:

$set_x(P)$, содержащий $a \in_? b$ можно заменить на $set_x(Q)\&a \in b \bigvee set_x(R)\&\neg(a \in b)$, где Q получено путём замены всех вхождений $a \in b$ на U_1, R получено путём замены всех вхождений $a \in b$ на $\varnothing$. По индукции таким образом можно устранить все условные предикаты. Таким образом, исходный терм бескванторно выразим над множеством 1-выразимости, термами вида $set_x(a \in b_?)$ и вида $set_x(a = \varnothing)$, где a и b — 1-выразимые операции. Рассмотрим операции. выразимые термами первого вида.

Для этих термов рассмотрим следующее разложение: $set_x(A) = set_x(x^* \in U_1\&A) \bigcup set_x(\neg(x^* \in U_1)\&A)$, где предикат $x^* \in b$ равен И тогда и только тогда, когда $\neg x \in U_1$.

Рассмотрим операцию, выразимую термом $set_x(\neg(x^* \in U_1)\&A)$. Все вхождения x в данный терм, кроме вхождений в виде x^*, можно заменить на $\varnothing$, сохраняя значение операции. Следовательно, предикат A выразим над $\bigcup, U_1 \bigcap, = \varnothing$ и x^*, x_i, x_i^*. Аналогично предыдущему, A имеет вид $a = \varnothing$, где a можно привести к форме, где снаружи идут операции объединения, затем пересечения, и затем дополнения до U_1, и затем вынести операцию объединения за предикат равенства, сведя предикат к конъюнкции предикатов вида $B\bigcap(U_1\backslash(x^*))$, B, $B\bigcap(x^*)$, $B\bigcap(x^*)\bigcap(U_1\backslash(x^*))$, где B не содержит x.

$set_x(B\bigcap(U_1\backslash(x^*)) = \varnothing) = \bigcap(B)$ — пересечение всех элементов множества B.

$set_x(B = \varnothing) = (B =_? \varnothing)$ (через этот предикат и предикат $\bigcap$ выражается предикат $=_?$)

$set_x(B\bigcap(x^*)\bigcap(U_1\backslash(x^*)) = \varnothing) = U_1 = U_1$

$set_x(B\bigcap(x^*) = \varnothing) = U_1\backslash\bigcup(B)$, где $\bigcup(B)$ — объединение всех множеств — элементов B.

Следовательно, к набору, выражающему 1-выразимые предикаты и операции, добавляются операции $\bigcap(a)$, $\bigcup(a)$ и $\mathbb{Z}$.

Рассмотрим операции, выразимые термами вида $set_x(x^* \in U_1\&A)$. Аналогично предыдущему получим, что все они выражаются через 1-выразимые операции и операции двух видов:

$set_x(B\bigcap(U_1\backslash(x)) = \varnothing)$ и

$set_x(B\bigcap(x) = \varnothing) = U_1\backslash\bigcup(B)$.

$set_x(B\bigcap(x) = \varnothing) = U_1\backslash\bigcup(B)$ есть множество подмножеств $U_1\backslash B$, то есть $2^{U_1\backslash B}$. $set_x(B\bigcap(U_1\backslash(x)) = \varnothing)$ — множество всех множеств из U_1, которые включают B. Обозначим эту операцию через $B\uparrow$.

Рассмотрим операции, выразимые термами вида $set_x(a \in b)$, где a и b выразимы над $U_1\backslash,\bigcup^*$. Аналогично предыдущему можно отдельно рассматривать случаи, когда x принадлежит и не принадлежит $\mathbb{Z}$. Поскольку $a \in (b\bigcup c) = a \in b\bigvee a \in c$, $a \in (b\bigcap c) = a \in b\bigvee a \in c$, $a \in (U_1\backslash b) = a \in U_1\&\neg a \in b$, то достаточно рассматривать случаи,когда выражение b имеет вид x^*, x или a, где a не содержит x.

Первый же операнд путём приведения его к нормальной форме и используя следующие упрощения:

$x\bigcap U_1\backslash x = \varnothing$

$a\bigcap U_1\backslash x = a\backslash x$

$c = c\bigcap x\bigcup c\backslash x$

$a\backslash x\bigcup b\backslash x = (a\bigcup b)\backslash x$

$a\bigcap x\bigcup b\bigcap x = (a\bigcup b)\bigcap x$

можно привести к виду $a\bigcap x\bigcup b\backslash x$ (в случае, когда x принадлежит $\mathbb{Z}$, к виду $a\bigcap x^*\bigcup b\backslash x^*$).

Следовательно, достаточно рассматривать термы следующих видов:

$set_x(a \in x), set_x(a \in b), set_x(a \in x^*) = set_x(a \in U_1\&x \in a)$ — 1-выразимые.

$set_x(a\bigcap x\bigcup b\backslash x) \in c$ — новая операция. Обозначим её через $trans(a,b,c)$

$set_x(a\bigcap x\bigcup b\backslash x) \in x = \varnothing$, так как $x \in U_1$ и не может содержать элементов U_1.

$set_x(a\bigcap x\bigcup b\backslash x) \in U_1\backslash x = U_1$ аналогично.

$set_x(a\bigcap x^*\bigcup b\backslash x^*) \in x^* = set_x(a\bigcap x^* = \varnothing)\bigcap set_x(b\backslash x^*) \in x^* = set_x(a\bigcap x^* = \varnothing)\bigcap b\bigcap set_x(b\backslash\mathbb{Z}\backslash x^* = \varnothing)$ — выразим через уже выбранные для выражающей системы предикаты.

$set_x(a\bigcap x^*\bigcup b\backslash x^*) \in U_1\backslash x^* = set_x(a\bigcap x^* = \varnothing)\bigcap set_x(b\backslash x^*) \in U_1\backslash x^* = set_x(a\bigcap x^* = \varnothing)\bigcap b\bigcap set_x(b\backslash\mathbb{Z}\bigcap x^* = \varnothing)$. — также выразим через уже имеющиеся предикаты.

Теорема 14. *все 2-выразимые в U_2 операции выразимы через*

$\{U_1\backslash a, a\bigcup b, a^*, a =_? \varnothing, a \uparrow, \bigcup(a), \bigcap(a), 2^a, trans(a,b,c)\}$, *где последние пять операций не вложены друг в друга.*

Список литературы

[1] Ю.С. Капустин, Об элементарной выразимости в логике предикатов, журнал "Интеллектуальные системы. Теории и приложения т. 23, выпуск 2 2019, Москва, с.135-166

[2] Клини С.К. Введение в метаматематику. Пер. с анг. — М., 1957. — 528 с.

Quantifier expressibility in predicate logic

I.S. Kapustin

New mathematical concepts are often introduced with some quantifier definitions. If we have a sufficiently large stock of such notions, it can allow to reformulate the new quantifier definitions in a quantifier-free form. This makes the problem of finding basic concepts, which make further quantifiable definition redundant, worth considering. Creating computer programs that automatically introduce such bases is also worth considering.

The present paper considers the quantifier expressibility in 4 algebraic systems. This paper provides bases of quantifier expressibility of small depth.

Keywords: predicate logic, quantifier expressibility, algebraic system

Список литературы

[1] Kapustin I. S., “On the elementary expressibility in predicate logic”, *Intelligent systems*, **23**:2 (2019).

[2] S. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Foreign Languages Publishing House, M., 1957.