

# Оценки энергопотребления для класса объёмных схем с близкими выходами.

А. А. Ефимов<sup>1</sup>

В данной работе рассматриваются объёмные схемы, являющиеся укладкой схем функциональных элементов в пространстве. Был рассмотрен класс  $T_{\text{near}}$  схем, где выходы расположены рядом. Для этого класса получены нижняя и верхняя оценка потенциала — меры мощности, равной количеству элементов схемы, выдающих единицу на данном входном наборе. В частности показано, что для булевых операторов с  $n$  входами и  $m$  выходами порядок функции Шеннона для класса схем  $T_{\text{near}}$  равен  $\Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right)$  при  $m \geq n$ ,  $\log_2(m) = o(2^n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Ключевые слова:** схемы из функциональных элементов, объёмные схемы, мощность схемы, потенциал.

## 1. Введение

Ещё в середине XX века в связи с интенсивным развитием вычислительной техники возникла задача синтеза схем, вычисляющих булевы функции и операторы. Одной из основных и наиболее подробно исследованных моделей схем является схема из функциональных элементов (СФЭ). В качестве характеристики оптимальности СФЭ можно рассматривать сложность — количество функциональных элементов, содержащихся в схеме. Таким образом, под сложностью булевой функции или оператора будем понимать минимальную сложность схемы, реализующую данную функцию или оператор. В 1956 году Д. Маллер [1] показал, что для любой булевой функции от  $n$  переменных сложность равна по порядку  $2^n/n$ . Далее в 1965 году О.Б. Лупановым [3] было доказано, что сложность почти всех булевых функций в стандартном базисе  $\{\vee, \wedge, \neg\}$  также асимптотически равна  $2^n/n$ . Больше того, О.Б. Лупанов также получил асимптотические оценки сложности булевых функций для произвольного конечного базиса.

Отметим, что также было много работ, посвященных другой мере сложности СФЭ — мощности. Её впервые определил М.Н. Вайнцвайг [2]

<sup>1</sup>Ефимов Алексей Андреевич — м.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: efimovqwerty@yandex.ru.

Efimov Alexey Andreevich — junior research assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

в 1961 году. Мощность или активность СФЭ – это максимальное количество элементов схемы, выдающих на выходе единицу, где максимум берётся по всем входным наборам. М.Н. Вайнцвайг показал, что порядок мощности СФЭ в зависимости от базиса может быть как линейным, так и экспоненциальным. Продолжил исследования мощности СФЭ О.М. Касим-Заде [6]. Он исследовал мощность в различных базисах и установил порядок функции Шеннона для произвольного конечного базиса.

Отметим, что в модели СФЭ не учитываются вполне естественные ограничения на размещение элементов схемы в плоскости или пространстве, способы их соединения, разводка проводов и т.п. В действительности, любая схема состоит из отдельных элементарных частей (функциональных элементов), которые имеют определенную длину, ширину и соединяются проводниками, размеры которых следует учитывать при оценке сложности реальных устройств.

Подобные модели схем впервые начал рассматривать А.Д. Коршунов [5]. Им была получена оценка сложности схем из объемных функциональных элементов ( $l$ -схем), удовлетворяющим некоторым ограничениям. Другая мера сложности, учитывающая топологию соединения элементов, была предложена А.Е. Андреевым [8] в 1994 году и была названа длиной кода. Им были получены верхние и нижние оценки сложности для ряда функций.

Также одной из моделей схем, учитывающих данные ограничения, являются плоские схемы, которые были введены С.С. Кравцовым [4] в 1967 году. Им был получен порядок функции Шеннона сложности СФЭ  $2^n$ . Н.А. Шкаликова в работе [7] одной из первых исследовала связь между площадью плоских схем и объемом трехмерных схем, реализующих булевы операторы. Она установила, что если оператор реализуется трехмерной схемой с объемом  $V$ , то его можно реализовать плоской схемой с площадью  $O(V^{3/2})$ , причём порядок оценки нельзя понизить. Г.В. Калачёв [11, 12, 13] в своих работах изучал одновременную минимизацию сразу трёх параметров плоских схем: сложности, мощности и глубины. Им был получен порядок функции Шеннона, реализующих булевы функции и операторы из различных классов [14, 15, 16].

Отметим, что развитие теории плоских схем было связано с развитием технологии производства и укладки реальных микросхем. Идея о том, что схемы можно укладывать друг на друга в пространстве была также известна давно, но не находила широкого применения вплоть до недавнего времени. Лишь несколько лет назад подобная технология начала использоваться инженерами на производстве. В частности, речь идёт о том, чтобы в будущем использовать многослойные чипы. Например, Т.Р. Сытдыковым [20, 21] рассматривается интересное обобщение модели клеточных схем, а именно прямоугольные многомерные схемы.

Рассматриваются СФЭ над базисом  $P_2(2)$ , элементы которых размещены в ячейках  $d$ -мерной целочисленной решетки. При этом в каждой ячейке расположено не более одного функционального элемента СФЭ, реализующего нетождественную функцию, а каждая пара ячеек соединена шиной, состоящей не более чем из  $k$  проводов. Им была получена верхняя оценка функции Шеннона сложности прямоугольных многомерных схем при  $k \rightarrow \infty$ .

Отметим, что определять меру сложности булевых функций не обязательно в модели СФЭ. В качестве альтернативной модели рассматриваются контактные схемы (КС). Сложностью КС считается количество её контактов. Ю.С. Шуткин [9] ввёл понятие временной сложности КС, являющиеся некоторым аналогом мощности СФЭ. Им было установлено, что функция Шеннона сложности моделирования КС для функций от  $n$  переменных равна  $2n - 1$ .

Также интересные результаты были получены В.В. Жуковым и С.А. Ложкиным [19]. Они рассматривают модели многовыходных и скалярных рекурсивных схем ограниченной глубины в произвольном базисе. В.В. Жуков и С.А. Ложкин представили методы получения нижних и верхних оценок функции Шеннона для сложности схем из данных классов, позволяющие установить её асимптотику.

Работа посвящена объёмным схемам [17, 18], которые определяются аналогично плоским схемам, но в манхэттенском пространстве. Под объёмной схемой понимается укладка схемы из функциональных элементов в пространстве. Объёмная схема состоит из кубических элементов. Каждый кубический элемент реализует булев оператор, у которого в сумме не более 6 входов и выходов. Также используется такую меру сложности схемы, как потенциал. Он равен максимальному значению количества единиц на всех внутренних узлах схемы. Неформально говоря, потенциал играет роль средней «энергии» схемы, необходимой для её функционирования.

В первой части данной работы получена нижняя оценка потенциала для класса частичных булевых операторов в случае, когда выходы оператора расположены достаточно близко.

В второй части работы впервые была получена верхняя оценка потенциала для булевых операторов в классе схем с близкими выходами. А именно показано, что в данном классе объёмных схем, реализующих булевы операторы  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , ( $m \leq n$ ) порядок потенциала не превосходит  $\mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ . Если же число выходов операторов связано ограничением  $n < m \leq 2^{n/2}$ , то порядок потенциала объёмных схем, реализующих эти булевы операторы, не превосходит  $\mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right)$ . В случае, если  $m > 2^{n/2}$ , то имеет место верхняя оценка потенциала  $\mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right)$ . Отметим, что при  $m \geq n$  для почти всех операторов верхняя

оценка совпадает с нижней оценкой, что позволяет говорить о порядке функции Шеннона в данном классе схем.

Автор выражает особую признательность научному руководителю д.ф.-м.н. профессору Э.Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство. Также автор благодарит Г.В. Калачёва за помощь и внимание к работе.

## 2. Основные понятия и формулировка результатов

*Кубическим элементом* будем называть булев оператор, у которого в сумме не более шести входов и выходов, причем каждому его входу и выходу сопоставлена некоторая метка из множества  $\{l, t, r, b, f, a\}$ , причём метки не повторяются.

Метки будем называть сторонами элемента:

- $l$  – левая сторона;
- $r$  – правая сторона;
- $t$  – верхняя сторона;
- $b$  – нижняя сторона;
- $f$  – передняя сторона;
- $a$  – задняя сторона.

Кубический элемент будем изображать в виде единичного куба в пространстве. При этом входам и выходам элемента сопоставляются грани куба в соответствии с присвоенными им метками.

Метки, присвоенные входам (выходам) оператора будем называть *входами (выходами)* элемента. Метки, не присвоенные ни входам, ни выходам, будем называть *изоляторами*. Множество входов (выходов) элемента  $e$  будем обозначать  $in(e)$  ( $out(e)$ ).

Если на всех выходах элемента реализуются тождественные функции, то будем называть элемент *коммутационным*, иначе – *логическим*.

Коммутационный элемент соответствует либо проводнику в микросхеме, либо пересечению проводов, либо тождественной функции, служащей для усиления сигнала.

Описывать элемент можно уравнениями, которые задают его оператор, заменяя все переменные в них на сопоставленные им метки  $(l, t, r, b, f, a)$ . Тогда в левой части каждого уравнения будет стоять выходная метка, а в правую часть будут входить только входные метки.

Через  $E$  обозначим множество всех кубических элементов.

Сетью из кубических элементов на множестве  $M \subset \mathbb{Z}^3$  будем называть отображение  $K : M \rightarrow E$ .

Элемент  $K(x, y, z)$  будем называть элементом схемы  $K$  с координатами  $(x, y, z)$ .

Левой, правой, верхней, нижней, передней и задней стороной элемента  $e$  с координатами  $(x, y, z)$  будем называть точки с координатами  $(x - \frac{1}{2}, y, z)$ ,  $(x + \frac{1}{2}, y, z)$ ,  $(x, y, z + \frac{1}{2})$ ,  $(x, y, z - \frac{1}{2})$ ,  $(x, y + \frac{1}{2}, z)$ ,  $(x, y - \frac{1}{2}, z)$  соответственно.

Будем говорить, что сеть  $K$  из кубических элементов *корректна*, если для любых элементов  $x$  и  $y$  схемы  $K$  верно, что если сторона  $a$  элемента  $x$  совпадает со стороной  $b$  элемента  $y$ , то выполнено одно из условий:

- один из элементов  $x, y$  – изолирующий,
- стороны  $a$  и  $b$  являются изоляторами,
- среди них одна является входом, другая выходом, например,  $a$  – выход, а  $b$  – вход, в таком случае будем говорить, что выход  $a$  *подключен* ко входу  $b$ .

Введём понятие *графа корректной сети из кубических элементов  $K$*  (будем обозначать  $G_K$ ).  $G_K$  – ориентированный граф, вершинами которого являются входы и выходы элементов схемы. Если выход одного элемента подключен ко входу другого, то им будет соответствовать одна и та же вершина графа (будем говорить, что эта вершина является выходом первого элемента и входом второго). Из вершины  $a$  в вершину  $b$  ведет ребро в том и только в том случае, когда существует элемент  $e$  такой, что  $a$  является его входом,  $b$  – выходом, причем функция, реализуемая на выходе  $b$ , существенно зависит от входа  $a$ .

*Объёмной схемой* или *схемой из кубических элементов* на множестве  $M \subseteq \mathbb{Z}^3$  будем называть корректную сеть из кубических элементов, в графе которой нет ориентированных циклов. Множество  $M$  будем называть *носителем* схемы  $K$ .

*Длиной* схемы  $K$  будем называть длину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $l(K)$ .

*Шириной* схемы  $K$  будем называть ширину наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $w(K)$ .

*Высотой* схемы  $K$  будем называть высоту наименьшего прямоугольного параллелепипеда, содержащего все непустые элементы схемы  $K$ , обозначается  $h(K)$ .

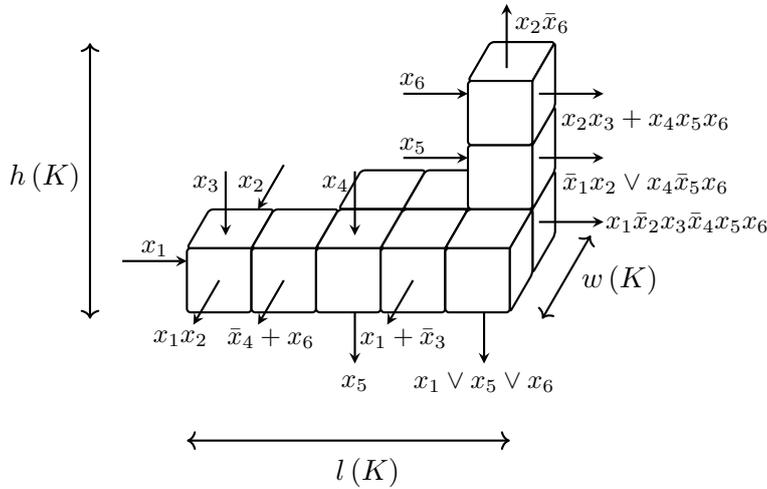


Рис. 1. Изображение объёмной схемы  $K$ .

На примере, изображенном на рис. 1, у схемы  $K$  имеется 6 входов, 9 выходов, а характеристики равны:  $l(K) = 5$ ,  $w(K) = 2$ ,  $h(K) = 3$ .

Если вход (выход) элемента не подключен к выходу (входу) другого элемента, будем его называть *входом (выходом)* схемы. *Контактами* схемы  $K$  будем называть её входы и выходы, и обозначать их  $In(K)$ ,  $Out(K)$  соответственно.

*Узлами* схемы  $K$  будем называть вершины графа  $G_K$ .

Если  $M$  – носитель схемы  $K$ , то величину  $|M|$ , равную количеству элементов в множестве  $M$ , будем называть *объёмом* схемы  $K$  и обозначать  $V(K)$ .

Каждой объёмной схеме  $K$  можно сопоставить схему их функциональных элементов ( $K$ ) следующим образом:

- 1) каждой функции  $f_{s,i}$ , которую реализует  $i$ -й выход элемента  $s$  объёмной схемы, сопоставим функциональный элемент  $e_{s,i}$ , реализующий  $f_{s,i}$ ; если  $i$ -й и  $j$ -й выходы являются выходами одной и той же функции, то им будет соответствовать один и тот же функциональный элемент;
- 2) если  $i$ -й выход элемента  $s_1$  подключен к  $j$ -му входу элемента  $s_2$ , то соединим выход элемента  $e_{s_1,i}$  с  $j$ -ми входами элементов  $e_{s_2,k}$  для всех  $k$ , для которых  $f_{s_2,k}$  существенно зависит от  $j$ -го аргумента;
- 3) удалим все тождественные функции, присоединив их вход ко всем их выходам.

Будем говорить, что схема  $K$  *реализует* булев оператор  $F$ , если схема из функциональных элементов ( $K$ ) реализует  $F$ .

Через  $V(F)$  обозначим объём схемы, реализующей оператор  $F$ , и обладающей минимальным объёмом среди всех объёмных схем, реализующих  $F$ .

Будем говорить, что объёмные схемы  $K_1$  и  $K_2$  *равны* и писать  $K_1 = K_2$ , если существует параллельный перенос пространства, который позволяет совместить схемы  $K_1$  и  $K_2$ , иначе будем говорить, что они *различны*.

Через  $(F)$  обозначим множество всех объёмных схем, реализующих оператор  $F$ .

Для каждой схемы  $K$  зафиксируем некоторую нумерацию её узлов. На  $i$ -м узле реализуется некоторая функция  $g_i$  от входных переменных схемы  $K$  (на входах схемы считаем, что реализуются тождественные функции).

Всюду далее символ  $:=$  будет обозначать «по определению равно».

Также далее будем считать, что схема  $K$  имеет  $n$  входов,  $m$  выходов и  $l$  узлов. *Состоянием* схемы  $K$  на входном наборе  $x$  назовём вектор

$$s_K(x) := (g_1(x), \dots, g_l(x)).$$

Если  $v = (v_1, \dots, v_q) \in \{0, 1\}^q$ , обозначим  $|v| := v_1 + v_2 + \dots + v_q$ .

*Потенциалом* схемы  $K$  на входном наборе  $x \in \{0, 1\}^n$  назовём величину  $u_K(x) := |s_K(x)|$ .

*Максимальным потенциалом* схемы  $K$  назовём величину

$$\hat{U}(K) := \max_{x \in \{0, 1\}^n} u_K(x).$$

Пусть  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$  – булев оператор. Тогда

$$\hat{U}(f) := \min_{K \in (f)} \hat{U}(K).$$

Если  $(f)$  пусто, то формально полагаем  $\hat{U}(f) = \infty$ .

*Средним потенциалом* схемы  $K$  на множестве входных наборов  $D \subseteq \{0, 1\}^n$  назовём величину

$$U_D(K) := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} u_K(x).$$

Через  $P_2(D, m)$  обозначим множество частичных булевых операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$  с  $m$  выходами, определённых на множестве  $D$ .

Через  $P_2(n, m)$  обозначим множество всюду определённых булевых операторов  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$  с  $n$  входами и  $m$  выходами.

Мы будем рассматривать случай, когда выходы схемы располагаются достаточно близко. Если мы будем рассматривать лишь схемы из некоторого множества  $Q$ , то будем ко всем мерам сложности и мощности добавлять нижний индекс  $Q$ .

Пусть  $f \in P_2(D, m)$ . Тогда

$$U_Q(f) := \min_{K \in Q \cap (f)} U_D(K).$$

Если  $Q \cap (f)$  пусто, то формально полагаем  $U_Q(f) = \infty$ .

Аналогично определим максимальный потенциал для  $f \in P_2(n, m)$ :

$$\hat{U}_Q(f) := \min_{K \in Q \cap (f)} \hat{U}(K).$$

Если  $Q \cap (f)$  пусто, то формально полагаем  $\hat{U}_Q(f) = \infty$ .

Введём функцию Шеннона для среднего и максимального потенциала:

$$U_Q(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} U_Q(f).$$

$$\hat{U}_Q(n, m) := \max_{f \in P_2(n, m)} \hat{U}_Q(f).$$

*Деревом выходов* схемы  $K$  назовем минимальное остовное дерево полного графа с вершинами в выходных элементах схемы  $K$ , причем расстояние между элементами – расстояние между их центрами в манхэттенской метрике.

Введём величину  $T(K)$ . Пусть  $m$  – количество выходов схемы  $K$ , числа  $r_1, \dots, r_{m-1}$  – длины рёбер дерева выходов. Положим

$$T(K) := \sum_{j=1}^{m-1} r_j.$$

То есть  $T(K)$  – величина, равная суммарной длине рёбер дерева выходов схемы  $K$ .

Введём множество  $T_h := \{K : T(K) \leq h\}$ , состоящее из таких объёмных схем, у которых длина дерева выходов не превосходит  $h$ .

Через  $T_{\text{near}}$  обозначим множество объёмных схем  $K$ , у которых длина дерева выходов не превосходит числа выходов.

**Теорема 1.** *Если  $D \subseteq \{0, 1\}^n$ ,  $d = |D|$ , то существует абсолютная константа  $C$ , такая, что неравенство*

$$U_{T_h}(f) \geq \begin{cases} C \frac{m \sqrt[3]{md}}{\log_2 d}, & \text{если } \sqrt[3]{md} > h, \\ C \frac{m \sqrt{md}}{\sqrt{h} \log_2 d}, & \text{если } \sqrt[3]{md} \leq h. \end{cases}$$

*выполнено для почти всех  $f \in P_2(D, m)$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \log_2(n) = o(d)$ ,  $\log_2(m) = o(d)$ .*

**Теорема 2.** Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , существует объёмная схема  $K_f \in T_{\text{near}}$  со входами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $m$  выходах которой реализуется оператор  $f$ , причём схема  $K_f$  обладает следующими характеристиками:

1) Если  $m \leq n$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

2) Если  $n < m \leq 2^{n/2}$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

3) Если  $m > 2^{n/2}$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(2^{n/2}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(2^{n/2}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(m); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Для почти всех  $f \in P_2(n, m)$ , при  $m \geq n, n \rightarrow \infty, \log_2(m) = o(2^n)$  верно равенство:

$$U_{T_{\text{near}}}(f) = \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right).$$

**Следствие 2.** Пусть  $m \geq n, n \rightarrow \infty, \log_2(m) = o(2^n)$ . Тогда верно асимптотическое равенство:

$$U_{T_{\text{near}}}(n, m) \asymp \hat{U}_{T_{\text{near}}}(n, m) = \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right).$$

### 3. Нижние оценки

При доказательстве верхних и нижних оценок возникает множество констант, которые мы будем обозначать  $C_1, C_2, C_3 \dots$ . Конкретные значения данных констант нам не важны, так как оценки приводятся с точностью до порядка. В доказательстве верхних и нижних оценок нумерация констант будет независимой.

### 3.1. Оценки для площади и объема

*Кубиком* будем называть единичный куб с вершинами в точках с целочисленными координатами и сторонами, параллельными осям координат.

*Расстоянием* между кубиками будем называть расстояние между их центрами по манхэттенской метрике.

*Шаром радиуса  $r$*  с данным центральным кубиком  $C^0$  будем называть множество кубиков, лежащих на расстоянии не более  $r-1$  от  $C^0$  (при  $r=0$  это множество пусто, см. рис. 2). Площадь поверхности шара радиуса  $r$  будем обозначать  $S_r$ .

Пусть  $M \subseteq \mathbb{Z}^3$ . Будем называть элементы из  $M$  *соседними*, если их координаты отличаются на 1 в одной компоненте, а две другие компоненты одинаковы. Рассмотрим граф  $Q_M$ , вершинами которого являются элементы множества  $M$ , а рёбра соединяют соседние элементы. Будем говорить что множество  $M$  *связно*, если граф  $Q_M$  связан.

Пусть  $W$  – некоторое множество кубиков. Через  $S(W)$  обозначим площадь поверхности  $W$ . Будем говорить, что множество  $W$  *связно*, если связно его множество центров кубиков.

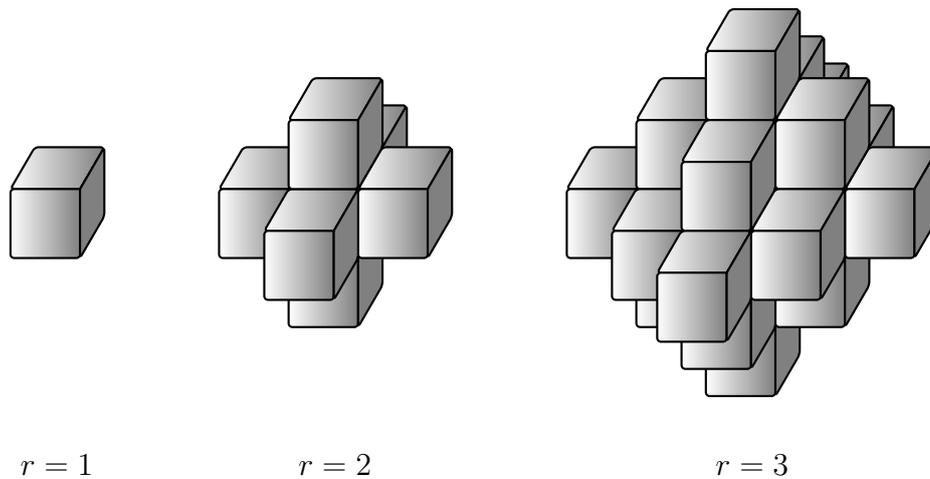


Рис. 2. Шары различного радиуса.

Введём некоторые обозначения. Пусть  $M \subseteq \mathbb{Z}^3, r \geq 1$ .

- $B_M(r)$  – множество кубиков в пространстве, отстоящих от точек из  $M$  не более чем на  $r-1$  по манхэттенской метрике.
- $V_M(r) = |B_M(r)|$  – объём множества  $B_M(r)$ ;  $V_M(0) := 0$ .

- $S_M(r)$  – площадь поверхности объединения кубиков из множества  $B_M(r)$ .
- $k_M(r)$  – количество компонент связности множества  $B_M(r)$  при  $r \geq 1$ ;  $k_M(0) := |M|$ .
- $\varphi_M(r) := \sum_{j=0}^r k_M(j)$  – вспомогательная функция, через которую выражаются оценки для  $S_M(r), V_M(r)$ .

**Лемма 1.** *Площадь поверхности  $S_r$  шара радиуса  $r$  равна*

$$6(r^2 + (r - 1)^2).$$

*Доказательство.* Рассмотрим любую из 6 проекций шара (см. рис. 3).

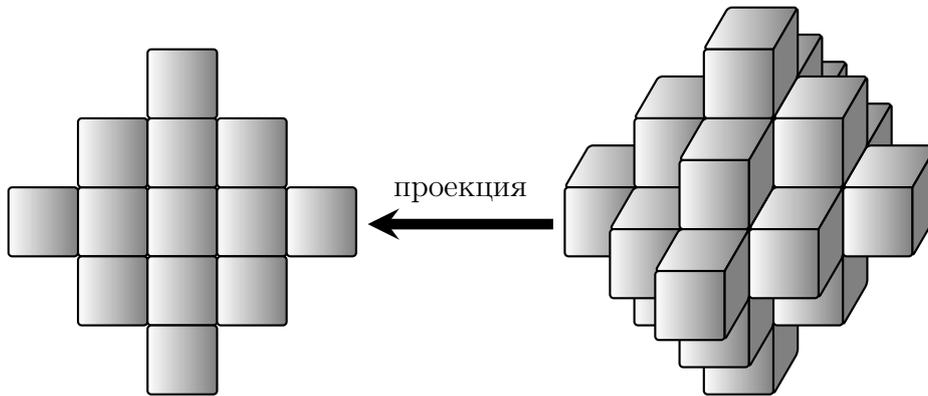


Рис. 3. Проекция шара.

Заметим, что площадь поверхности данного шара будет равна площади поверхности проекции, увеличенной в 6 раз. Также заметим, что площадь поверхности поверхности равна (считаем по слоям, сверху вниз)

$$\sum_{i=1}^r (2i - 1) + \sum_{i=1}^{r-1} (2i - 1) = r^2 + (r - 1)^2.$$

А значит, площадь поверхности всего шара равняется  $6(r^2 + (r - 1)^2)$ , что и требовалось. □

**Следствие 1.** *Площадь поверхности  $S_r \leq 12r^2$ .*

**Лемма 2.** Пусть  $C^1, C^2 \in \mathbb{Z}^3$ . Через  $W_i(r)$  обозначим шар радиуса  $r$  с центром в  $C^i, i = 1, 2$ . Пусть  $r_0$  такое, что  $W_1(r_0) \cap W_2(r_0) = \emptyset$  (не имеет общих граней), а  $W_1(r_0+1) \cap W_2(r_0+1) \neq \emptyset$ . Обозначим  $\Delta = r - r_0$ . Тогда для любого  $r \geq r_0$  имеет место оценка

$$S(W_1(r) \cup W_2(r)) \leq 24r^2 - 6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2).$$

*Доказательство.* Оценим площадь поверхности двух шаров как сумму площадей поверхностей шаров и разность той части поверхности шара, которая окажется внутри пересечения (см. рис. 4). Такие грани кубиков, которые оказываются внутри пересечения, будем называть «испорченными». Если все грани кубика «испорчены», то такой кубик назовём «испорченным».

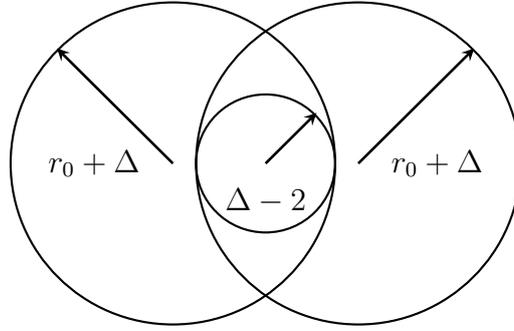


Рис. 4.

Случай  $\Delta = 1$ . Заметим, что тогда в каждом шаре «испорчена» хотя бы одна грань. Тогда площадь поверхности объединения двух шаров можно оценить сверху как разность суммы площадей поверхности и удвоенной площади «испорченной» грани. Получаем

$$\begin{aligned} S(W_1(r) \cup W_2(r)) &\leq 6 \cdot ((r_0 + 1)^2 + r_0^2) + 6 \cdot ((r_0 + 1)^2 + r_0^2) - 2 \leq \\ &\leq 12 \cdot (2r_0^2 + 2r_0 + 1) - 2 \leq 24r_0^2 + 24r_0 + 10 \leq \\ &\leq 24r_0^2 + 48r_0 + 18 \leq \\ &\leq 24(r_0 + 1)^2 - 6((1 - 1)^2 + (1 - 2)^2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Случай  $\Delta \geq 2$ . Отметим, что при  $\Delta = 2$  будет полностью испорчен хотя бы один кубик, назовём его базовым. Введём  $U(r) = W_1(r) \cap W_2(r)$ . Заметим также, что если внутри  $U(r)$  находится какая-нибудь фигура, то внутри  $U(r+x)$  будет находиться фигура, составленная из всех кубиков, расположенных на расстоянии не более  $x$  от  $U(r)$ .

Т.к. при  $r = r_0 + 2$  внутри пересечения шаров  $U(r_0 + 2)$  находится один базовый кубик (то есть шар радиуса 1), то при  $r = r_0 + \Delta$  внутри поместится шар радиуса  $\Delta - 1$ . Далее заметим, что площадь поверхности пересечения  $U(r_0 + \Delta)$  не меньше площади указанного шара радиуса  $\Delta - 1$ , так как для каждой грани шара можно указать грань  $U(r_0 + \Delta)$ , которую можно на неё спроецировать. По лемме 1 площадь поверхности шара радиуса  $\Delta - 1$  равна  $6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2)$ . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} S(W_1(r) \cup W_2(r)) &= S(W_1(r)) + S(W_2(r)) - S(U(r)) \leq \\ &\leq 24(r_0 + \Delta)^2 - 6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2). \end{aligned}$$

□

**Лемма 3.** Пусть  $M = \{C^1, C^2, \dots, C^n\} \subseteq \mathbb{Z}^3$ . Тогда

$$S_M(r) \leq 60r \cdot \varphi_M(r - 1).$$

*Доказательство.* Обозначим  $W_i(r)$  – шар радиуса  $r$  с центром  $C^i$ . Проведем доказательство индукцией по числу шаров.

**Базис индукции:**  $n = 1$ . Согласно следствию 1 площадь поверхности шара

$$S_M(r) = S(W_1(r)) \leq 12r^2 \leq 60r^2 \leq 60r \cdot \varphi_M(r - 1).$$

**Шаг индукции:** пусть для всех множеств, состоящих не более, чем из  $n - 1$  элементов утверждение верно, докажем для  $n$ .

1) Рассмотрим случай, когда  $W(r)$  разбивается на две несвязные друг с другом компоненты  $A(r)$  и  $B(r)$ , т.е.  $W(r) = A(r) \sqcup B(r)$ . Через  $M_1$  обозначим множество центров шаров  $A(r)$ , а через  $M_2$  обозначим множество центров шаров  $B(r)$ . Тогда  $M = M_1 \sqcup M_2$ . Заметим, что

$$S_M(r) = S_{M_1}(r) + S_{M_2}(r). \quad (1)$$

По предположению индукции верны оценки

$$\begin{aligned} S_{M_1}(r) &\leq 60r \cdot \varphi_{M_1}(r - 1), \\ S_{M_2}(r) &\leq 60r \cdot \varphi_{M_2}(r - 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что так как для всех  $i \leq r - 1$  верно

$$k_M(i) = k_{M_1}(i) + k_{M_2}(i),$$

то имеет место равенство

$$\begin{aligned} \varphi_M(r - 1) &= \sum_{j=0}^{r-1} k_M(j) = \sum_{j=0}^{r-1} k_{M_1}(j) + \sum_{j=0}^{r-1} k_{M_2}(j) = \\ &= \varphi_{M_1}(r - 1) + \varphi_{M_2}(r - 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Совместив результаты утверждений (1), (2) и (3), получаем:

$$\begin{aligned} S_M(r) &= S_{M_1}(r) + S_{M_2}(r) \leq 60r \cdot \varphi_{M_1}(r-1) + 60r \cdot \varphi_{M_2}(r-1) = \\ &= 60r \cdot \varphi_M(r-1). \end{aligned}$$

2) Теперь рассмотрим основной случай, когда множество  $W(r)$  является связным. Введём полный граф  $G$ , где вершинами являются точки  $C^i$ , а длины ребер – расстояния между ними. Рассмотрим минимальное остовное дерево  $T$  в графе  $G$ , и без ограничения общности будем считать, что  $C^n$  является листом в  $T$ .

Обозначим  $W'(r) = W_1(r) \cup W_2(r) \cup \dots \cup W_{n-1}(r)$ ,  $W(r) = W'(r) \cup W_n(r)$ ;  $M = M' \cup \{C^n\}$ . Через  $r_0$  обозначим такое максимальное  $r$ , что шар  $W_n(r)$  не пересекается с множеством  $W'(r)$ , т.е.

$$r_0 = \max\{x : W'(x) \cap W_n(x) = \emptyset\}.$$

Так как  $W(r) = W'(r) \sqcup W_n(r)$  при  $r \leq r_0$  (по определению  $r_0$ ), то

$$k_M(r) = k_{M'}(r) + 1, \text{ при } r \leq r_0. \quad (4)$$

Докажем, что

$$k_M(r) = k_{M'}(r), \text{ при } r > r_0. \quad (5)$$

Заметим, что  $k_M(r) \leq k_{M'}(r)$  при  $r > r_0$ , так как шар  $W_n(r)$  при  $r > r_0$  пересекается с множеством  $W'(r)$ , а значит число компонент связности в множестве  $W(r)$  будет не больше, чем в множестве  $W'(r)$ .

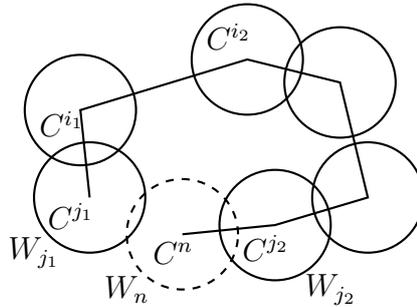


Рис. 5.

Предположим, что при некотором  $r > r_0$  выполняется неравенство  $k_M(r) < k_{M'}(r)$ . Это может произойти только в случае, если шар  $W_n(r)$  будет пересекаться с двумя шарами  $W_{j_1}(r)$  и  $W_{j_2}(r)$ , которые лежат в разных компонентах связности множества  $W'(r)$  (см. рис. 5). Рассмотрим ребра  $C^{j_1}C^n$  и  $C^{j_2}C^n$  графа  $G$ . Эти ребра одновременно не могут

лежать в МОД  $T$ , так как  $C^n$  является листом графа  $T$ . Без ограничения общности считаем, что  $C^n C^{j_2} \in T$ . Заметим тогда, что вершины  $C^{j_1}$  и  $C^{j_2}$  будут соединены путем в графе  $T$ , причем одно из рёбер этого пути будет больше (на рисунке это ребро  $C^{i_1} C^{i_2}$ ), чем ребро  $C^{j_1} C^n$ . Тогда можно удалить ребро  $C^{i_1} C^{i_2}$  и вместо него добавить ребро  $C^{j_1} C^n$  в граф  $T$ . Отметим, что полученный граф будет остовным деревом для графа  $G$ , но с меньшей суммарной длиной рёбер, чем  $T$ , что противоречит тому, что  $T$  является МОД. Значит,  $k_M(r) \geq k_{M'}(r)$  при  $r > r_0$ . Таким образом, утверждение (5) доказано.

В качестве следствия из оценок (4) и (5) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_M(r-1) &= \sum_{j=0}^{r-1} k_M(j) = \sum_{j=0}^{r_0} k_M(j) + \sum_{j=r_0+1}^{r-1} k_M(j) = \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} k_{M'}(j) + r_0 + 1 = \varphi_{M'}(r-1) + r_0 + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим  $\Delta = r - r_0$ . Рассмотрим случай, когда шар  $W_n(r)$  пересекается только с одним шаром  $W_j(r)$  из множества  $W(r)$ . Тогда согласно лемме 2 имеем оценку

$$S_M(r) - S_{M'}(r) \leq 12(r_0 + \Delta)^2 - 6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2). \quad (7)$$

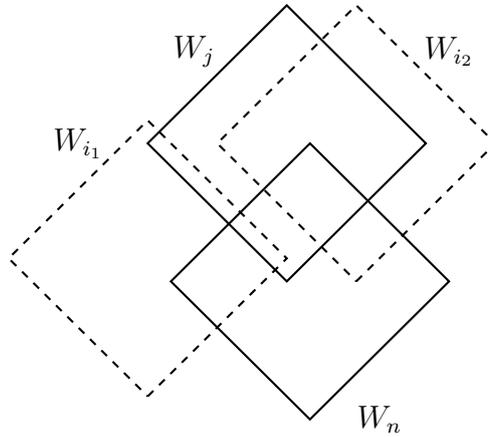


Рис. 6.

Покажем, что если шар  $W_n(r)$  пересекается с несколькими шарами, то оценка (7) также верна. Обозначим шары, с которыми пересекается шар  $W_n(r)$  следующим образом:  $W_j(r), W_{i_1}(r), W_{i_2}(r), \dots$ . Разрежем всю

картинку по слоям и зафиксируем слой (см. рис. 6). Обозначим прямоугольник  $R = W_j \cap W_n$ , а множество  $R' = W' \cap W_n$ . Так как прямоугольник  $R \subseteq R'$ , то его периметр не превосходит периметра  $R'$ . Таким образом, так как площадь поверхности пересечения – это сумма периметров пересечения по слоям, то оценка (7) верна и в данном случае.

Из оценок (6), (7), предположения индукции и определения  $\Delta$  получаем:

$$\begin{aligned}
S_M(r) &\leq S_{M'}(r) + 12(r_0 + \Delta)^2 - 6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2) \leq \\
&\leq 60r \cdot \varphi_{M'}(r - 1) + 12(r_0 + \Delta)^2 - 6((\Delta - 1)^2 + (\Delta - 2)^2) = \\
&= 60r \cdot (\varphi_M(r - 1) - r_0 - 1) + 12(r_0 + \Delta)^2 - 6(2\Delta^2 - 6\Delta + 5) = \\
&= 60r \cdot \varphi_M(r - 1) - 60r(r_0 + 1) + 12r_0^2 + 24r_0\Delta + 36\Delta - 30 = \\
&= 60r \cdot \varphi_M(r - 1) - 60(r_0 + \Delta)(r_0 + 1) + 12r_0^2 + 24r_0\Delta + 36\Delta - \\
&- 30 = 60r \cdot \varphi_M(r - 1) - 48r_0^2 - 36r_0\Delta - 24\Delta - 90 \leq \\
&\leq 60r \cdot \varphi_M(r - 1).
\end{aligned}$$

Утверждение доказано. □

**Лемма 4.** Пусть  $M = \{C^1, C^2, \dots, C^n\} \subseteq \mathbb{Z}^3$ . Тогда

$$V_M(r) \leq 60r^2 \cdot \varphi_M(r - 1).$$

*Доказательство.* Проведем доказательство индукцией по величине радиуса  $r$ .

**Базис индукции:**  $r = 1$ .

$$V_M(1) = n \leq 60 \cdot 1 \cdot n.$$

**Шаг индукции:** так как каждая грань относится только к одному кубику, то имеет место следующее неравенство

$$\begin{aligned}
V_M(r + 1) &\leq V_M(r) + S_M(r + 1) \leq 60r^2\varphi_M(r - 1) + 60(r + 1)\varphi_M(r) \leq \\
&\leq 60r^2\varphi_M(r) + 60(r + 1)\varphi_M(r) \leq 60\varphi_M(r)(r^2 + r + 1) \leq \\
&\leq 60(r + 1)^2\varphi_M(r).
\end{aligned}$$

□

### 3.2. Общие оценки

Здесь и всюду далее будем полагать, что  $D \subset \{0, 1\}^n$ . Пусть  $d = |D|$ ,  $h \geq 1$ . Через  $P_u(D, h)$  обозначим множество таких операторов  $G : D \rightarrow \{0, 1\}^h$ , что

$$\frac{1}{d} \sum_{x \in D} |G(x)| \leq u.$$

**Лемма 5.** (Калачёв Г.В., [11, лемма 1]) Если  $u \leq h$ , то

$$\log_2 |P_u(D, h)| \leq du \log_2 \frac{eh}{u}.$$

**Лемма 6.** Количество различных кубических элементов равно  $C_1 = 90\,537\,043\,409$ .

*Доказательство.* У кубического элемента может быть от 0 до 5-ти входов. Рассмотрим каждый из случаев.

- 0) В этом случае каждая из 6-ти граней либо изолятор, либо реализует константу (то есть 3 варианта для каждой грани). Всего  $3^6 = 729$  кубических элементов.
- 1) Есть 6 расположений входа. Каждая из оставшихся граней либо изолятор, либо реализует функцию от одной переменной (всего 5 вариантов для каждой стороны), причем все 5 оставшихся граней не могут одновременно быть изоляторами. Поэтому элементов  $6 \cdot (5^5 - 1) = 18\,744$ .
- 2) Есть  $\binom{2}{6} = 15$  вариантов расположений входов. Каждая из оставшихся граней либо изолятор, либо реализует функцию от двух переменных (всего  $2^{2^2} + 1 = 17$  вариантов для каждой стороны), причем все 4 оставшиеся грани не могут быть одновременно изоляторами. Поэтому элементов  $15 \cdot (17^4 - 1) = 1\,252\,800$ .
- 3) Есть  $\binom{3}{6} = 20$  вариантов расположений входов. Каждая из оставшихся граней либо изолятор, либо реализует функцию от трёх переменных (всего  $2^{2^3} + 1 = 257$  вариантов для каждой стороны), причем все 3 оставшиеся грани не могут быть одновременно изоляторами. Поэтому элементов  $20 \cdot (257^3 - 1) = 339\,491\,840$ .
- 4) Есть  $\binom{4}{6} = 15$  вариантов расположений входов. Каждая из оставшихся граней либо изолятор, либо реализует функцию от четырёх переменных (всего  $2^{2^4} + 1 = 65\,537$  вариантов для каждой стороны), причем обе оставшиеся грани не могут быть одновременно изоляторами. Поэтому элементов  $15 \cdot (65\,537^2 - 1) = 64\,426\,475\,520$ .
- 5) В этом случае есть единственный выход, который не может быть изолятором. Есть 6 расположений выхода, причем на нём реализуется любая из  $2^{2^5} = 4\,294\,967\,296$  функций от 5-ти переменных. Поэтому элементов  $6 \cdot 4\,294\,967\,296 = 25\,769\,803\,776$ .

Суммируя, получаем  $90\,537\,043\,409$ . Обозначим это число через  $C_1$ .

□

**Лемма 7.** *Количество объёмных схем объёмом  $v$  не больше, чем  $2^{C_2 v}$ , где  $C_2$  – некоторая константа.*

*Доказательство.* Сначала рассмотрим объёмные схемы со связным носителем. Имеется не более  $(5e)^v$  связных областей с объёмом  $v$  (поликубы) [13]. Далее, для каждой связной области  $M$  объёмом  $v$  в каждый кубик можно поставить один из  $C_1$  видов кубиков (лемма 6). Поэтому область  $M$  можно заполнить кубиками  $(C_1)^v$  способами. Таким образом, существует не более  $(5e \cdot C_1)^v$  схем объёмом  $v$  со связным носителем. Обозначим  $C' = \log_2(5e \cdot C_1)$ .

Теперь рассмотрим случай, когда носитель несвязен. Если он разбивается на части с объёмами  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 + v_2 + \dots + v_k = v$ , то количество таких схем не больше, чем  $2^{C'v_1} \cdot 2^{C'v_2} \cdot \dots \cdot 2^{C'v_k} = 2^{C'v}$ .

Пусть  $v \in \mathbb{N}$ . Оценим сверху количество всевозможных разбиений  $\sigma_v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  числа  $v = \sum_{i=1}^k v_i$ , где  $v_i > 0, i = 1 \dots k$ , причём разбиения, отличающиеся порядком слагаемых будем считать одинаковыми. Каждое разбиение  $\sigma_v$  можно закодировать при помощи последовательности  $\rho_v$  длины  $v - 1$  из нулей и единиц следующим образом. Если разбиение  $\sigma_v$  состоит из  $k$  элементов, то в соответствующей последовательности  $\rho_v$  будет  $k - 1$  единица. Пусть  $\{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}\}$  – места, где стоят единицы в  $\rho_v$ . Положим  $j_i = \sum_{s=1}^i v_s$ . Отметим, что разным разбиениям  $\sigma_v$  будут соответствовать разные последовательности  $\rho_v$ . Поэтому количество разбиений не больше, чем  $2^{v-1}$ .

Для каждого разбиения имеется не более  $2^{C'v}$  схем, поэтому схем меньше, чем  $2^{C'v} 2^{v-1} < 2^{(C'+1)v}$ . Далее взяв  $C_2 = C' + 1$ , получим утверждение леммы. □

Пусть у нас есть алгоритм определения *последнего слоя* схемы относительно некоторых ее выходов, который зависит только от геометрии схемы.

Введём множество  $L(u, v, h, D, m)$  операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$  вида  $f = F(x, G(x))$ , где существует такая схема  $K$ , что выполнены условия:

- 1)  $K$  имеет  $t$  выходов,  $h$  входов на последнем слое и не более  $n$  входов, не лежащих на последнем слое.
- 2) объём  $K$  не превосходит  $v$ .
- 3)  $K$  реализует оператор  $F : D \times \{0, 1\}^h \rightarrow \{0, 1\}^m$ , причем последние  $h$  аргументов подаются на входы  $K$ , расположенные на последнем слое.

4)  $G \in P_u(D, h)$ .

**Лемма 8.** Если  $d = |D|$ ,  $h \geq 1$  и  $v \leq \frac{3}{5C_3}md$ , то

$$L(u, v, h, D, m) < m!n!2^{m(1-\varepsilon_1)d}$$

при  $u \leq \frac{m}{5 \log_2 d}$ , где  $C_2$  взято из условия леммы 7,  $C_3 = \max\{C_2, 30\}$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{1}{5} - \frac{3}{C_3 \ln 2}$ .

*Доказательство.* Отметим заранее, что идея доказательства аналогична доказательству из работы [11, лемма 4]. В частности было доказано, что

$$\log_2 x \leq \frac{x}{e \ln 2}. \quad (8)$$

Заметим, что поскольку у каждого элемента схемы может быть не более 5-ти входов, то если  $h > 5v$ , то схем объёма  $v$  с  $h$  входами нет, и утверждение верно. Поэтому далее полагаем, что  $h \leq 5v \leq \frac{3}{C_3}md$ .

Оценим число  $|L(u, v, h, D, m)|$ . По лемме 5 количество различных операторов  $G$  из  $P_u(D, h)$  не больше, чем  $2^{du \log_2 \frac{eh}{u}}$ . Количество операторов  $F$  с точностью до перестановок входов не больше, чем количество схем объёма  $v$ , то есть  $2^{C_2 v}$ . Для каждой схемы можно осуществить произвольную перестановку выходов, а также входов, на которые подается  $x$ . С учетом перестановок выходов и входов, на которые подается  $x$ , получается не более  $m!n!2^{C_2 v}$  операторов.

Таким образом,

$$|L(u, v, h, D, m)| \leq m!n!2^{C_2 v} 2^{du \log_2 \frac{eh}{u}} = m!n!2^{C_2 v + du \log_2 \frac{eh}{u}}. \quad (9)$$

Оценим показатель степени при  $u \leq \frac{m}{5 \log_2 d}$ , учитывая, что  $v \leq \frac{3}{5C_3}md$ ,  $h \leq \frac{3}{C_3}md$ :

$$\begin{aligned} C_2 v + du \log_2 \frac{eh}{u} &\leq C_2 v + du \log_2 d + du \log_2 \frac{eh}{du} \leq \\ &\leq \frac{3}{5}md + d \frac{m}{5 \log_2 d} \log_2 d + du \frac{eh}{du \cdot e \ln 2} \leq \\ &\leq \frac{4}{5}md + \frac{3}{C_3 \ln 2}md = \\ &= md(1 - \varepsilon_1). \end{aligned}$$

Отметим, что  $C_3$  выбрано таким образом, чтобы  $\varepsilon_1 > 0$ . Отсюда

$$2^{C_2 v + du \log_2 \frac{eh}{u}} \leq 2^{m(1-\varepsilon_1)d},$$

и домножая на  $m!n!$  и подставляя в (9), получаем утверждение леммы.  $\square$

### 3.3. Доказательство основной теоремы

Для доказательства основной теоремы воспользуемся некоторыми определениями, введёнными ранее в работах [12], [11].

Пусть  $M$  – подсхема схемы  $K$ . Входы и выходы схемы  $M$ , не являющиеся входами и выходами схемы  $K$ , назовём *граничными контактами* подсхемы  $M$  относительно схемы  $K$ . Множество граничных контактов обозначим  $(M|K)$ .

Через  $In(M|K)$  обозначим множество входов  $M$ , которые лежат в разрезе  $(M|K)$  (такие входы будем называть *граничными*), то есть

$$In(M|K) = In(M) \cap In(M|K) = In(M) \setminus In(K).$$

Через  $Out(MK)$  обозначим множество выходов  $M$ , которые являются выходами  $K$ , то есть

$$Out(MK) = Out(M) \cap Out(K) = Out(M) \setminus Out(M|K).$$

Если  $M$  – подсхема схемы  $K$ , то через  $U_{in}(M|K)$  обозначим средний потенциал на граничных входах подсхемы  $M$ , то есть

$$U_{in}(M|K) = \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in In(M|K)} g_{\alpha}(x).$$

*Расслоением* схемы  $K$  назовём произвольное множество  $(M_i)_{i=1}^t$  её подсхем такое, что  $In(M_i|K) \cap In(M_j|K) = \emptyset$ , если  $i \neq j$ .

Нижнюю оценку будем доказывать следующим образом. Пусть есть класс  $B$  операторов, причем для каждого оператора  $f \in B$  и любой схемы  $K$ , реализующей оператор  $f$  есть нижние оценки для потенциала на границе любой подсхемы, удовлетворяющей определенным ограничениям. Тогда будем строить расслоение  $(M_i)_{i=1}^t$  такое, что подсхемы  $M_i$  удовлетворяют этому ограничению, и для каждого  $M_i, i = 1, \dots, t$  использовать оценку потенциала на границе  $(M_i|K)$ , а потом суммировать, чтобы получить оценку для всей схемы  $K$ , то есть  $U_D(K) \geq \sum_{i=1}^t U_{in}(M_i|K)$ .

Пусть  $D \subset \{0, 1\}^n, d := |D|$ . Рассмотрим множество  $L_0(D, m)$  операторов  $f : D \rightarrow \{0, 1\}^m$ , реализуемых некоторой схемой  $K$  так, что существует её подсхема  $K_0$ , содержащая хотя бы один выход схемы  $K$  такая, что

$$V(K_0) \leq \frac{3}{5C_3} |Out(K_0K)|d, \quad U_{in}(K_0|K) \leq \frac{|Out(K_0K)|}{5 \log_2 d}. \quad (10)$$

**Лемма 9.** (Калачёв Г.В., [12, лемма 10]). Для любой плоской схемы  $K$  и любого подмножества её выходов  $U$  существует схема  $K_U$ , носитель

которой лежит в носителе схемы  $K$ , множество её выходов совпадает с  $U$  и на каждом из этих выходов  $K_U$  реализует ту же функцию, что и схема  $K$ .

Отметим, что конструктивное доказательство этого факта содержит алгоритм, который можно дословно повторить для объёмных схем (то есть он никак существенно не использует геометрию схемы).

Доказательство следующей леммы идейно аналогично доказательству из работы [11, лемма 5], но использует другие константы и ограничения.

**Лемма 10.** (Аналог [11, лемма 5] для объёмных схем). Пусть  $\log_2 m \leq \frac{\varepsilon_1}{6}d$ , где значение  $\varepsilon_1$  взято из условия леммы 8. Тогда  $|L_0(D, m)| = o(2^{md})$  при  $d \rightarrow \infty, n \log_2 n = o(d)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим классы  $l(v, h, D, m_0) \subset L_0(D, m)$ , для которых выполнено (10), причём  $V(K_0) = v, |In(K_0|K)| = h, |Out(K_0K)| = m_0$  при фиксированных  $1 \leq m_0 \leq m, 0 \leq v \leq \frac{3}{5C_3}md$  и  $h > 0$ . Подсчитаем число элементов в  $l(v, h, D, m_0)$ . Как уже отмечалось в лемме 8, имеет смысл рассматривать лишь  $h \leq 5v \leq \frac{3}{C_3}md$  (иначе  $l(v, h, D, m_0) = \emptyset$ ).

Аналогично доказательству из [11, лемма 5], получим оценку:

$$|l(v, h, D, m_0)| \leq \frac{2^{md}}{2^{d\left(\varepsilon_1 - \frac{2\log_2 m + n \log_2 n}{d}\right)}}.$$

Оценим количество элементов в  $L_0(D, m)$ :

$$\begin{aligned} |L_0(D, m)| &= \left| \bigsqcup_{m_0=1}^m \bigsqcup_{v=0}^{\frac{3}{5C_3}m_0d} \bigsqcup_{h=0}^{\frac{3}{C_3}m_0d} l(v, h, D, m_0) \right| \leq \\ &\leq \sum_{m_0=1}^m \frac{9}{5C_3^2} m_0^2 d^2 \frac{2^{md}}{2^{d\left(\varepsilon_1 - \frac{2\log_2 m + n \log_2 n}{d}\right)}} \leq \\ &\leq m^3 d^2 \frac{2^{md}}{2^{d\left(\varepsilon_1 - \frac{2\log_2 m + n \log_2 n}{d}\right)}}. \end{aligned}$$

Значит доля операторов из  $L_0(D, m)$  равна:

$$\frac{|L_0(D, m)|}{2^{md}} \leq \frac{m^3 d^2}{2^{d\left(\varepsilon_1 - \frac{2\log_2 m + n \log_2 n}{d}\right)}} \leq \frac{1}{2^{d\left(\varepsilon_1 - \frac{5\log_2 m + 2\log_2 d + n \log_2 n}{d}\right)}}.$$

Оценим выражение в показателе.  $\log_2 m \leq \frac{\varepsilon_1}{6}d, \log_2 d + n \log_2 n = o(d)$  при  $d \rightarrow \infty, n \log_2 n = o(d)$ , поэтому

$$d \left( \varepsilon_1 - \frac{5\log_2 m + 2\log_2 d + n \log_2 n}{d} \right) \geq d \left( \frac{\varepsilon_1}{6} + o(1) \right) \rightarrow \infty$$

при  $d \rightarrow \infty$ ,  $n \log_2 n = o(d)$ .

Поэтому  $\frac{|L_0(D,m)|}{2^{md}} \rightarrow 0$  при  $d \rightarrow \infty$ ,  $n \log_2 n = o(d)$ . □

Введём величину  $\bar{T}(K)$ . Пусть  $m$  – количество выходов схемы  $K$ , числа  $r_1, \dots, r_{m-1}$  – длины рёбер дерева выходов в порядке возрастания. Положим

$$\bar{T}(K) := \sum_{j=1}^{m-2} \left\lceil \frac{r_j}{2} \right\rceil + 2 \left\lceil \frac{r_{m-1}}{2} \right\rceil.$$

То есть  $\bar{T}(K)$  – величина, равная по порядку суммарной длине рёбер дерева выходов.

Введём множество  $\bar{T}_h := \{K : \bar{T}(K) \leq h\}$ , состоящее из таких объёмных схем, у которых длина дерева выходов не превосходит  $h$  по порядку.

Далее воспользуемся следующей леммой для плоского случая, доказательство которой аналогично переносится на объёмный случай.

**Лемма 11.** (Калачёв Г.В., [11, лемма 8]). Для любой схемы  $K$  с более, чем одним выходом, выполнено

- 1)  $\varphi(r' - 1) = \bar{T}(K)$ , где  $r' := \min\{r : k_r = 1\}$ ,
- 2)  $\varphi(r) \leq \bar{T}(K) + r$  при  $r \geq 1$ .

Введём некоторые обозначения. Пусть  $K$  – объёмная схема,  $M \subseteq \mathbb{Z}^3$  – носитель схемы  $K$ .

- $K_r$  – множество элементов схемы  $K$ , лежащих в множестве  $B_M(r)$ .
- $v_r = |K_r|$  – объём схемы  $K_r$ ;  $v_0 = 0$ .
- $\varphi(r) := \varphi_M(r)$ .
- $I_r$  – множество входов схемы  $K_r$ , лежащих на границе  $B_M(r)$  при  $r \geq 1$ .
- $I_0$  – множество выходов схемы  $K$  (0-й слой схемы  $K$ ).
- $O_r$  – множество выходов схемы  $K_r$ , лежащие на границе  $B_M(r)$  при  $r \geq 1$ ;  $O_0 := \emptyset$ .
- $u_r := \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} \sum_{\alpha \in I_r \cup O_r} g_\alpha(x)$  – средний потенциал на  $r$ -м слое схемы  $K$ .

**Лемма 12.** Если  $m \geq 2$ ,  $f \in P_2(D, m) \setminus L_0(D, m)$ ,  $d = |D|$ , то

$$U_{T_h}(f) \geq C_6 \frac{m\sqrt{md}}{\sqrt{(h + \sqrt[3]{md}) \log_2 d}},$$

где  $C_6$  – некоторая константа.

*Доказательство.* Возьмём произвольную схему  $K \in \bar{T}_{\frac{h}{2}}$ , реализующую оператор  $f$  и её расслоение  $\{K_r\}_{r=1}^{r_0}$ , приняв

$$r_0 := \max \left\{ r \in \mathbb{N} : r^2 \varphi(r-1) \leq \frac{md}{C_4} \right\},$$

где  $C_4 = \frac{5 \cdot 60}{3} C_3$ , а константа  $C_3$  взята из условия леммы 8.

Тогда  $(r_0 + 1)^2 \varphi(r_0) \geq \frac{md}{C_4}$ , значит  $r_0 + 1 \geq \sqrt{\frac{md}{C_4 \varphi(r_0)}}$ . По лемме 11 и определению  $\bar{T}_{\frac{h}{2}}$  получаем

$$r_0 + 1 \geq \sqrt{\frac{md}{C_4 \varphi(r_0)}} \geq \frac{\sqrt{md}}{\sqrt{C_4(\bar{T}(K) + r_0)}} \geq \frac{\sqrt{md}}{\sqrt{C_4\left(\frac{h}{2} + r_0\right)}}. \quad (11)$$

Поскольку  $r_0^3 \leq r_0^2 \varphi(r_0 - 1) \leq \frac{md}{C_4}$ , то  $r_0 \leq \frac{\sqrt[3]{md}}{\sqrt[3]{C_4}}$ . Обозначим  $C_5 := \frac{1}{\sqrt[3]{C_4}}$ , и получим из (11)

$$r_0 + 1 \geq \frac{\sqrt{md}}{\sqrt{C_4\left(\frac{h}{2} + C_5 \sqrt[3]{md}\right)}}$$

Далее по лемме 4 при всех  $r \leq r_0$  получаем  $u_r \leq 60r^2 \varphi(r-1) \leq \frac{3}{5C_3} md$ . Тогда поскольку  $f \notin L_0(D, m)$ , то для любого  $r \leq r_0$  выполнено  $u_r \geq \frac{m}{5 \log_2 d}$ , значит

$$\begin{aligned} U_D(K) &\geq \sum_{r=0}^{r_0} u_r \geq \sum_{r=0}^{r_0} \frac{m}{5 \log_2 d} = \frac{m(r_0 + 1)}{5 \log_2 d} \geq \\ &\geq \frac{m\sqrt{md}}{5\sqrt{C_4\left(\frac{h}{2} + C_5 \sqrt[3]{md}\right)} \log_2 d} \geq C_6 \frac{m\sqrt{md}}{\sqrt{(h + \sqrt[3]{md}) \log_2 d}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $C_6 := \frac{1}{5\sqrt{C_4 \max\{\frac{1}{2}, C_5\}}}$ .

□

Заметим, что  $T_h \subseteq \bar{T}_{\frac{h}{2}}$ . Далее, рассматривая отдельно случаи  $\sqrt[3]{md} > h$  и  $\sqrt[3]{md} \leq h$ , и взяв  $C = \frac{C_6}{\sqrt{2}}$ , получаем утверждение основной теоремы.

**Теорема 1.** *Если  $D \subseteq \{0, 1\}^n$ ,  $d = |D|$ , то существует абсолютная константа  $C$ , такая, что неравенство*

$$U_{T_h}(f) \geq \begin{cases} C \frac{m \sqrt[3]{md}}{\log_2 d}, & \text{если } \sqrt[3]{md} > h, \\ C \frac{m \sqrt{md}}{\sqrt{h} \log_2 d}, & \text{если } \sqrt[3]{md} \leq h. \end{cases}$$

выполнено для почти всех  $f \in P_2(D, m)$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \log_2(n) = o(d)$ ,  $\log_2(m) = o(d)$ .

## 4. Верхние оценки

### 4.1. Параметры основных блоков

Для реализации булева оператора нам потребуются несколько различных блоков. Опишем их характеристики.

1) Дешифратор  $D_n^1$  (Ефимов А.А., [17, лемма 2]):

$$l(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n), w(D_n^1) = \mathcal{O}(2^{n/2}), h(D_n^1) = 1, \hat{U}(D_n^1) = \mathcal{O}(2^n).$$

2) Блок дешифраторов  $D'_{n,k}$  (Калачёв Г.В., [13, лемма 2.19]):

$$l(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n), w(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(nk), h(D'_{n,k}) = 1, \\ \hat{U}(D'_{n,k}) = \mathcal{O}(kn^2 \cdot 2^n) + \mathcal{O}(k^2n \cdot 2^n).$$

3) Левый обратный блок  $D'^{-1}_{n,k}$  (Калачёв Г.В., [13, лемма 2.20]):

$$l(D'^{-1}_{n,k}) = \mathcal{O}(k \cdot 2^n), w(D'^{-1}_{n,k}) = \mathcal{O}(kn^2), h(D'^{-1}_{n,k}) = 1, \\ \hat{U}(D'^{-1}_{n,k}) = \mathcal{O}(k^2n^2 \cdot 2^n).$$

4) Блок  $\vee_n^k$ , реализующий  $k$  дизъюнкций от  $n$  переменных (Ефимов А.А., [18, лемма 5]):

$$l(\vee_n^k) = 1, w(\vee_n^k) = k, h(\vee_n^k) = n, \hat{U}(\vee_n^k) = \mathcal{O}(nk).$$

5) Схема  $Q_g^1$ , такая что схема  $D_m^{-1} \circ Q_g^1 \circ D'_{k-l,4}$  реализует оператор  $g : \{0, 1\}^{4k-4l} \rightarrow \{0, 1\}^m, n = 6k, m = 8^{4l}$  (Ефимов А.А., [18, лемма 6]):

$$l(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), w(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), h(Q_g^1) = 1, \\ \hat{U}(Q_g^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}).$$

6) Схема  $W_f^1$ , реализующая оператор  $f'(z, \vec{x}) = zf(\vec{x})$ , где оператор  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m, (m \leq n)$  (Ефимов А.А., [18, лемма 7]):

$$l(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), w(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \hat{U}(W_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}).$$

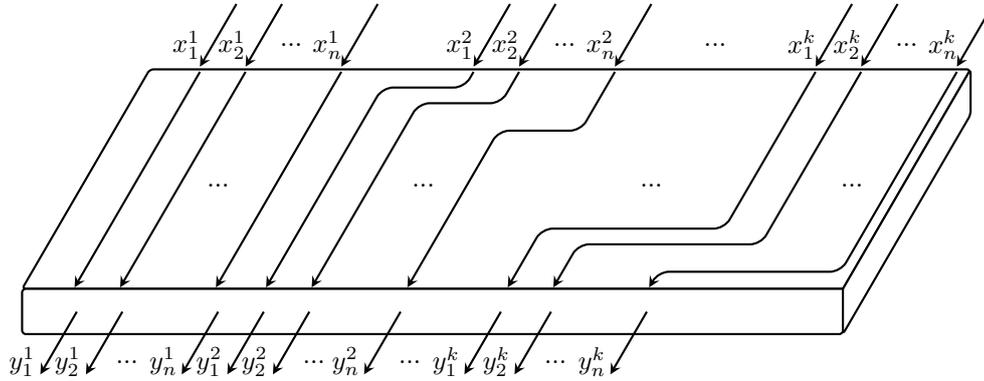


Рис. 7. Реализация блока  $C_{n,k,t}$ .

#### 4.2. Реализация булева оператора с близкими выходами

Введём дополнительный блок  $C_{n,k,t}$  (см. рис. 7), реализующий тождественный оператор и «собирающий» выходы вместе.

**Лемма 13.** *Существует объёмная схема  $C_{n,k,t}$  высоты 1, имеющая  $k$  групп по  $n$  входов (всего  $nk$  входов), расстояние между каждыми группами равно  $t$  и реализующая тождественный оператор. Тогда, если потенциал на каждую группу входов ограничен константой  $C_1$ , то схема имеет следующие характеристики:*

- 1)  $l(C_{n,k,t}) = \mathcal{O}((n+t)k)$ ,  $w(C_{n,k,t}) = \mathcal{O}(nk)$ ,  $h(C_{n,k,t}) = 1$ ;
- 2)  $\hat{U}(C_{n,k,t}) = \mathcal{O}((n+t)k^2)$ .

*Доказательство.* Оценим параметры схемы  $C_{n,k,t}$ .

Так как у нас есть  $k$  групп по  $n$  входов и расстояние между группами, то длину схемы можно оценить

$$l(C_{n,k,t}) = \mathcal{O}((n+t)k).$$

Ширина увеличивается на 1 всякий раз, когда нам нужно провести какой-то провод влево. Так как таковых проводов  $k-1$  группа по  $n$  проводов (провода из первой группы не нужно проводить влево), то ширину схемы можно оценить

$$w(C_{n,k,t}) = \mathcal{O}(nk).$$

Высота схемы  $C_{n,k,t}$  равна

$$h(C_{n,k,t}) = 1.$$

Оценим потенциал схемы  $C_{n,k,t}$ . Так как на каждую группу входов потенциал ограничен константой  $C_1$ , то это означает, что от каждой группы проводов активными будут не более  $C_1$ . Таким образом, всего будут активны не более  $C_1 k$  проводов. Потенциал каждого провода по порядку оценим как сумму длины и ширины схемы  $C_{n,k,t}$ . В итоге получаем оценку

$$\hat{U}(C_{n,k,t}) = C_1 k \cdot (\mathcal{O}((n+t)k) + \mathcal{O}(nk)) = \mathcal{O}((n+t)k^2).$$

□

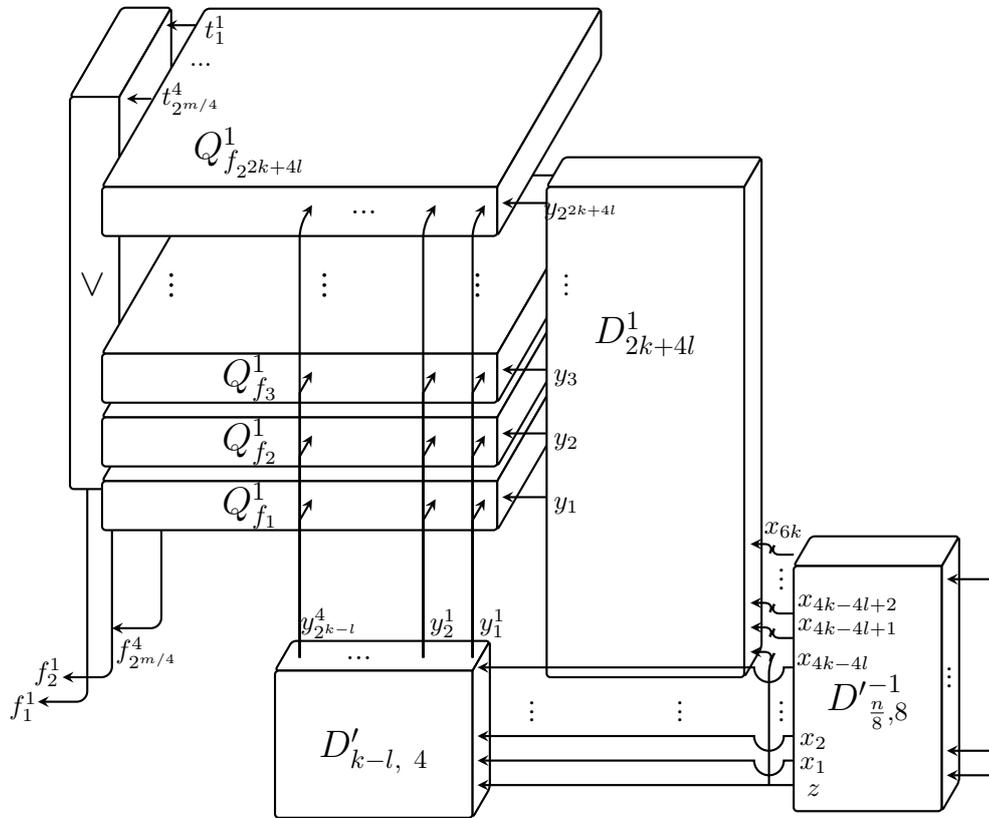


Рис. 8. Реализация блока  $\widetilde{W}_f^1$ .

Далее рассмотрим схему  $\widetilde{W}_f^1$  (см. рис. 8), реализующую булев оператор  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ ,  $m \leq n$ . Эта схема отличается от схемы  $W_f^1$  (Ефимов А.А., [18, лемма 7]) отсутствием блока  $D_{m/4, 4}^{-1}$  и наличием бло-

ка  $D_{\frac{n}{8},8}^{-1}$ . Покажем, схема  $\widetilde{W}_f^1$  имеет те же характеристики, что и схема  $W_f^1$ .

**Лемма 14.** *Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , ( $m \leq n$ ) существует объёмная схема  $\widetilde{W}_f^1$ , что на схеме  $D_{\frac{m}{4},4}^{-1} \circ \widetilde{W}_f^1 \circ D_{\frac{n}{8},8}^1$  реализуется оператор  $f'(z, \vec{x}) = z f(\vec{x})$ , причём схема  $\widetilde{W}_f^1$  обладает следующими характеристиками:*

- 1)  $l(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ,  $w(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ,  
 $h(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ;
- 2)  $\hat{U}(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ;
- 3)  $V(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$ .

*Доказательство.* Так как от характеристики схемы  $\widetilde{W}_f^1$  должны совпадать с характеристиками  $W_f^1$ , а они отличаются удалением блока  $D_{m/4,4}^{-1}$  и добавлением блока  $D_{\frac{n}{8},8}^{-1}$ , то достаточно показать, что характеристики блока  $D_{\frac{n}{8},8}^{-1}$  не превосходят заявленных характеристик.

$$\begin{aligned} l(D_{\frac{n}{8},8}^{-1}) &= \mathcal{O}(8 \cdot 2^{\frac{n}{8}}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}). \\ h(D_{\frac{n}{8},8}^{-1}) &= 1. \\ \hat{U}(D_{\frac{n}{8},8}^{-1}) &= \mathcal{O}\left(8^2 \cdot \frac{n^2}{8^2} \cdot 2^{\frac{n}{8}}\right) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}). \end{aligned}$$

□

Теперь построим схему  $\widetilde{W}_f^1$  для булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , где  $n < m \leq 2^{n/2}$ .

**Лемма 15.** *Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , ( $n < m \leq 2^{n/2}$ ) существует объёмная схема  $\widetilde{W}_f^1 \in T_{\text{near}}$  со входами  $z, x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $m$  выходах которой на допустимых наборах ( $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ ) реализуется оператор  $f'(z, \vec{x}) = z f(\vec{x})$ , причём схема  $\widetilde{W}_f^1$  обладает следующими характеристиками:*

- 1)  $l(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ,  $w(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ,  
 $h(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3})$ ;

$$2) \hat{U}(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right);$$

$$3) V(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n).$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда  $n = 8t, k = \sqrt[3]{\frac{m}{n}}$ . Отметим, что условие  $m \leq 2^{n/2} \leq n^2 \cdot 2^n$  можно переписать как  $k = \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \leq \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}$ , чем и будем пользоваться в дальнейших оценках. Покажем, что тогда схема, изображенная на рис. 9 реализует оператор  $f$ .

Мы подаем входные переменные  $z, x_1, \dots, x_n$  на вход блоку дешифраторов  $D'_{n/8,8}$ . Далее все эти провода в «зашифрованном» виде подводим к каждому из  $k^3$  соответствующих блоков  $\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$ , которые реализуют оператор  $f_{i,j,l}$  от  $n$  переменных. Все провода от блока  $D'_{n/8,8}$  к блокам  $\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$  на рис. 9 изображены пунктирными линиями для удобства восприятия. После этого выходы каждого блока  $\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$  подаются в «зашифрованном» виде. Далее, собирая все выходы блоков  $\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$  с помощью двух ярусов блоков  $C_{\alpha,k,\beta}$  и  $C_{k,k,\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}}$ , получаем выходы оператора в «зашифрованном» виде  $f$ , но при этом расположенные рядом. В конце «расшифровываем» выходы с помощью блоков  $D_{n/4,4k}^{-1}$ .

Оценим параметры схемы  $\widetilde{W}_f^1$ .

$$\begin{aligned} l(\widetilde{W}_f^1) &= k \cdot \left( l(\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1) + k \right) + w(D_{n/8,8}) = \\ &= \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \cdot \left( \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right) + \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \right) + \mathcal{O}(n^2/16 + n) = \\ &= \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(\widetilde{W}_f^1) &= k \cdot \left( w(\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1) + 1 \right) = \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \cdot \left( \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right) + 1 \right) = \\ &= \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\widetilde{W}_f^1) &= k \cdot w(\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1) + 2 \cdot h\left(C_{k,k,\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}}\right) = \\ &= \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right) + \mathcal{O}(k^2) = \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

Оценим объём схемы  $\widetilde{W}_f^1$ :

$$V(\widetilde{W}_f^1) \leq l(\widetilde{W}_f^1) \cdot w(\widetilde{W}_f^1) \cdot h(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n).$$

Оценим потенциал схемы.

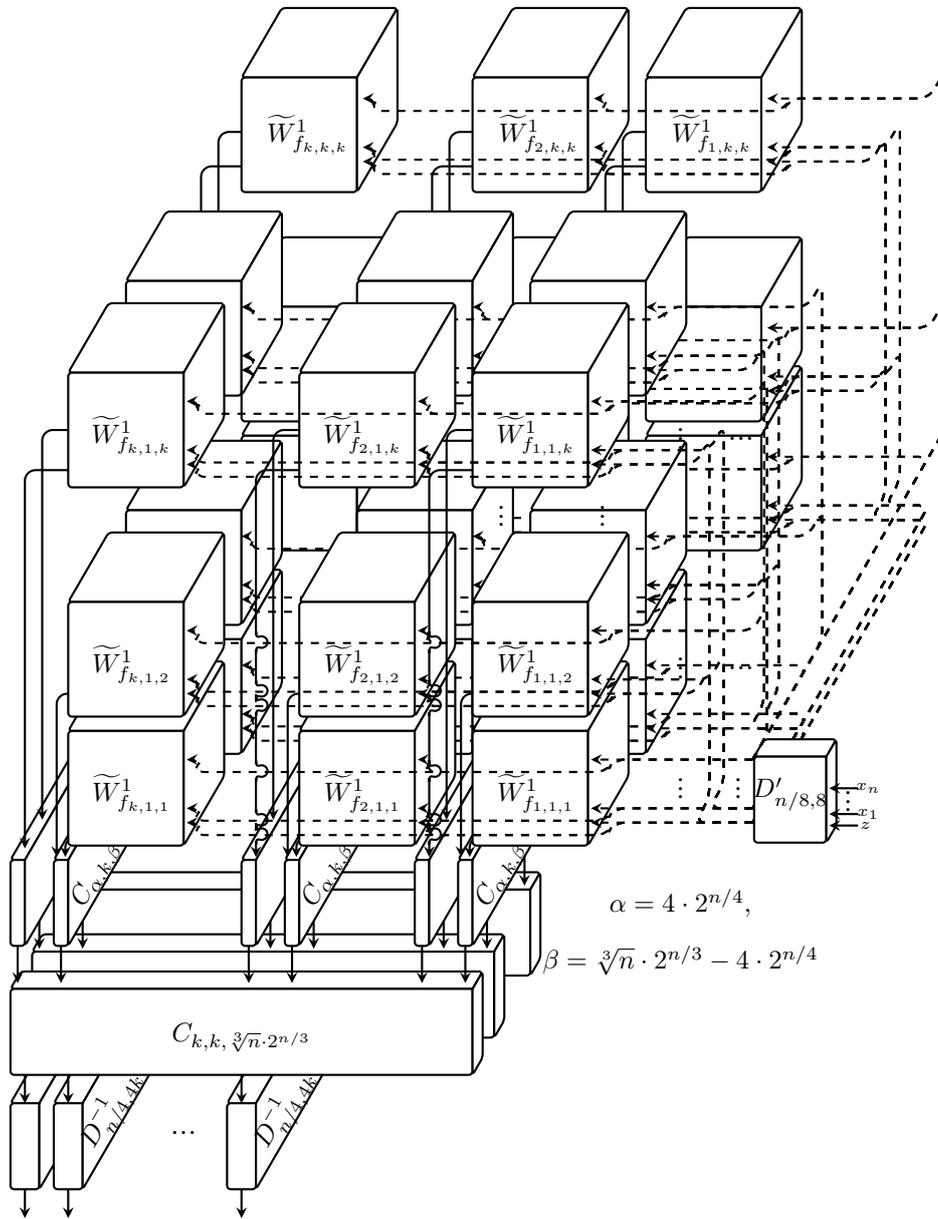


Рис. 9. Реализация блока  $\tilde{W}_f^1$  ( $n < m \leq 2^{n/2}$ ).

1) Блок дешифраторов  $D'_{n/8,8}$ :

$$U_1 \leq \hat{U}(D'_{n/8,8}) = \mathcal{O}(8n \cdot 2^{n/8} + n^2/8 \cdot 2^{n/8}) = \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}).$$

- 2) Далее на выходе из блока дешифраторов  $D'_{n/8,8}$  будут активны 8 проводов, которые мы подводим к  $k^3$  блокам  $\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$ . Длину каждого активного провода оценим как  $l(\widetilde{W}_f^1) + w(\widetilde{W}_f^1) + h(\widetilde{W}_f^1)$ . Таким образом, имеем оценку:

$$U_2 \leq 8 \cdot k^3 \cdot \left( l(\widetilde{W}_f^1) + w(\widetilde{W}_f^1) + h(\widetilde{W}_f^1) \right) = \frac{m}{n} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right).$$

- 3) Оценим потенциал всех  $k^3$  блоков  $\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$ :

$$U_3 \leq k^3 \cdot \hat{U}\left(\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1\right) = \frac{m}{n} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right).$$

- 4) Далее на выходе каждого блока  $\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$  будут активны 4 провода, которые мы подводим к блокам  $C_{\alpha,k,\beta}$ , где  $\alpha = 4 \cdot 2^{n/4}$ ,  $\beta = \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3} - 4 \cdot 2^{n/4}$ . Длину каждого активного провода оценим как  $h(\widetilde{W}_f^1)$ . Таким образом, имеем оценку:

$$U_4 \leq k^3 \cdot 4 \cdot h\left(\widetilde{W}_f^1\right) = \frac{m}{n} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right).$$

- 5) Оценим потенциал всех  $k^2$  блоков  $C_{\alpha,k,\beta}$ . Отметим, что в каждом блоке  $C_{\alpha,k,\beta}$  на каждую группу входов подается ровно по 4 активных выхода блока  $\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$ . Таким образом, соблюдены условия леммы 13 и мы имеем оценку:

$$\begin{aligned} U_5 &\leq k^2 \cdot \hat{U}(C_{\alpha,k,\beta}) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \mathcal{O}\left((\alpha + \beta) k^2\right) = \\ &= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \\ &= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

- 6) Оценим потенциал всех  $\alpha \cdot k$  блоков  $C_{k,k,\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}}$ . Заметим, что на входе всех блоков активны будут ровно  $4 \cdot k^3$  (это количество активных выходов всех блоков  $\widetilde{W}_{f_{i,j,l}}^1$ , прошедших через верхний ярус тождественных блоков  $C_{\alpha,k,\beta}$ ). Потенциал от каждого провода оценим  $l\left(C_{k,k,\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}}\right) + w\left(C_{k,k,\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}}\right)$ . Таким образом, имеем оценку:

$$\begin{aligned} U_6 &\leq 4 \cdot k^3 \cdot \left( \mathcal{O}\left(\left(k + \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3}\right) k\right) + \mathcal{O}\left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3} \cdot k\right) \right) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right). \end{aligned}$$

7) Оценим потенциал всех  $k^2$  блоков  $D_{n/4,4k}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} U_7 &\leq k^2 \cdot \hat{U} \left( D_{n/4,4k}^{-1} \right) = k^2 \cdot \mathcal{O} \left( \frac{n^2}{16} \cdot 16k^2 \cdot 2^{n/4} \right) = \\ &= \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot n^{2/3} \cdot 2^{n/4} \right). \end{aligned}$$

В итоге, имеем следующую оценку потенциала схемы  $\widetilde{W}_f^1$ :

$$\begin{aligned} \hat{U} \left( \widetilde{W}_f^1 \right) &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 = \mathcal{O} \left( n^2 \cdot 2^{n/8} \right) + \\ &+ \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{n} \cdot 2^{n/3} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3} \right) + \\ &+ \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3} \right) + \\ &+ \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot n^{2/3} \cdot 2^{n/4} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем верное утверждение теоремы в случае  $n = 8t, k = \sqrt[3]{\frac{m}{n}}$ . Если же  $n = 8t + r, m = k^3 n + l$ , где  $1 \leq r \leq 7, 1 \leq l \leq ((3k^2 + 3k + 1)n - 1)$ , то построим схему для  $n = 8t + 8, m = (k + 1)^3 n$  и на последние  $8 - r$  входов подадим константу 0, а лишние выходы доопределим нулем. Заметим, что в данном случае получим искомую схему и константы в оценках увеличатся не более, чем в константу раз, а значит оценки по порядку останутся верными.  $\square$

Далее построим схему  $\widetilde{W}_f^1$  для булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{m_0}$ , где  $m_0 = 2^{n/2}$ , причём выходы схемы  $\widetilde{W}_f^1$  будут расположены на одной прямой.

**Лемма 16.** Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{m_0}$ , ( $m_0 = 2^{n/2}$ ) существует объёмная схема  $\widetilde{W}_f^1 \in T_{\text{near}}$  со входами  $z, x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $m_0$  выходах которой на допустимых наборах ( $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ ) реализуется оператор  $f'(z, \vec{x}) = z f(\vec{x})$ , причём схема  $\widetilde{W}_f^1$  обладает следующими характеристиками:

- 1)  $l \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( 2^{n/2} \right), w \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( 2^{n/2} \right),$   
 $h \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( m_0 \right) = \mathcal{O} \left( 2^{n/2} \right);$
- 2)  $\hat{U} \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( \frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2} \right);$
- 3)  $V \left( \widetilde{W}_f^1 \right) = \mathcal{O} \left( m_0 \cdot 2^n \right).$

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда  $n = 8t$ . Обозначим  $k_0 = \sqrt[3]{\frac{m_0}{n}} = \frac{2^{n/6}}{n^{1/3}}$ . Покажем, что тогда схема, изображенная на рис. 10 реализует оператор  $f$ .

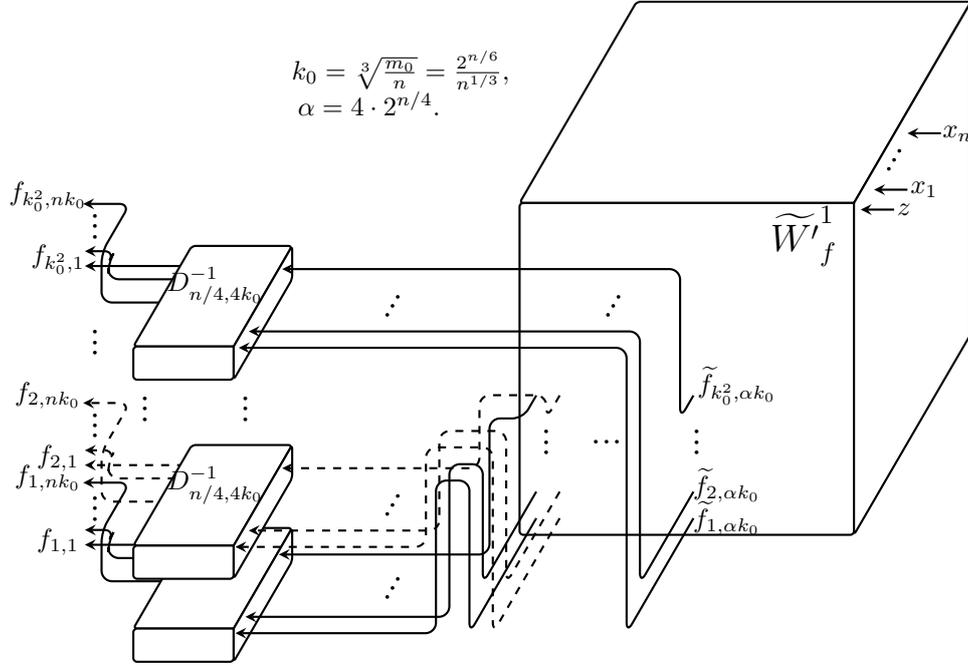


Рис. 10. Реализация вспомогательного блока  $\widetilde{W}_f^1$  ( $m_0 = 2^{n/2}$ ).

Мы подаем входные переменные  $z, x_1, \dots, x_n$  на вход блока  $\widetilde{W}_f^1$  (который отличается от блока  $\widetilde{W}_f^1$  отсутствием блоков  $D_{n/4, 4k}^{-1}$ , стоящих на выходах, см. Рис. 9), реализующий оператор  $f$  с  $n$  входами и  $m_0 = 2^{n/2}$  выходами. Далее, собирая все «зашифрованные» выходы блока  $\widetilde{W}_f^1$  и расшифровывая их с помощью блоков  $D_{n/4, 4k_0}^{-1}$ , получаем выходы оператора  $f$ .

Оценим параметры схемы  $\widetilde{W}_f^1$ .

$$\begin{aligned} l(\widetilde{W}_f^1) &= l(\widetilde{W}'_f^1) + \mathcal{O}(k_0^2) + w(D_{n/4,4k_0}^{-1}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}) + \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{2^{n/3}}{n^{2/3}}\right) + \mathcal{O}(k_0 \cdot n^2) = \mathcal{O}(2^{n/2}) + \mathcal{O}(n^{1/3} \cdot 2^{n/3}) = \\ &= \mathcal{O}(2^{n/2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(\widetilde{W}_f^1) &= w(\widetilde{W}'_f^1) + l(D_{n/4,4k_0}^{-1}) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}) + \mathcal{O}(\alpha k_0) = \\ &= \mathcal{O}(2^{n/2}) + \mathcal{O}\left(\frac{2^{5/12}}{n^{1/3}}\right) = \mathcal{O}(2^{n/2}). \end{aligned}$$

$$h(\widetilde{W}_f^1) = h(\widetilde{W}'_f^1) = \mathcal{O}(2^{n/2}) = \mathcal{O}(m_0).$$

Оценим объём схемы  $W_f^1$ :

$$V(\widetilde{W}_f^1) \leq l(\widetilde{W}_f^1) \cdot w(\widetilde{W}_f^1) \cdot h(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(m_0 \cdot 2^n).$$

Оценим потенциал схемы.

1) Блок  $\widetilde{W}'_f^1$ :

$$U_1 \leq \hat{U}(\widetilde{W}'_f^1) = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot \sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right).$$

2) Далее на выходе из блока  $\widetilde{W}'_f^1$  среди всех «зашифрованных» выходов  $\widetilde{f}_{i,j}$  будут активны ровно  $4k_0^3$  (это следует из того, что блок  $\widetilde{W}'_f^1$  состоит из  $k_0^3$  блоков  $\widetilde{W}_{f_{i,j,k}}^1$ , выходы которых шифровались с помощью блока дешифраторов  $D'_{n/4,4}$ ). Длину каждого провода оценим  $l(\widetilde{W}_f^1) + 3h(\widetilde{W}_f^1)$ . Таким образом, имеем оценку:

$$U_2 \leq 4k_0^3 \cdot (l(\widetilde{W}_f^1) + 3h(\widetilde{W}_f^1)) = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right).$$

3) Оценим потенциал всех  $k_0^2$  блоков  $D_{n/4,4k_0}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} U_3 &\leq k_0^2 \cdot \hat{U}(D_{n/4,4k_0}^{-1}) = k_0^2 \cdot \mathcal{O}(n^2 \cdot k_0^2 \cdot 2^{n/4}) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot \frac{m_0^{1/3}}{n^{1/3}} \cdot n^2 \cdot 2^{n/4}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot n^{5/3} \cdot 2^{5n/12}\right) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right). \end{aligned}$$

- 4) Оценим потенциал всех проводов, выходящих из блоков  $D_{n/4,4k_0}^{-1}$ . В каждом таком блоке  $nk_0$  проводов, длину каждого можно оценить  $2nk_0$ . Так как в схеме имеется  $k_0^2$  блоков  $D_{n/4,4k_0}^{-1}$ , то имеем оценку:

$$\begin{aligned} U_4 &\leq nk_0 \cdot 2nk_0 \cdot k_0^2 = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot \frac{m_0^{1/3}}{n^{1/3}} \cdot n^2\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot n^{5/3} \cdot 2^{n/6}\right) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right). \end{aligned}$$

В итоге, имеем следующую оценку потенциала схемы  $\widetilde{W}_f^1$ :

$$\begin{aligned} \hat{U}\left(\widetilde{W}_f^1\right) &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right) + \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем верное утверждение теоремы в случае  $n = 8t$ . Если же  $n = 8t + r$ , где  $r = 1 \dots 7$ , то построим схему для  $n = 8t + 8$  и на последние  $8 - r$  входов подадим константу 0. Заметим, что в данном случае получим искомую схему и константы в оценках увеличатся не более, чем в константу раз, а значит оценки по порядку останутся верными. □

Теперь построим схему  $\widetilde{W}_f^1$  для булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , где  $m > 2^{n/2}$ .

**Лемма 17.** *Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , ( $m > 2^{n/2}$ ) существует объёмная схема  $\widetilde{W}_f^1 \in T_{\text{near}}$  со входами  $z, x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $m$  выходах которой на допустимых наборах ( $z \geq x_1 \vee \dots \vee x_n$ ) реализуется оператор  $f^1(z, \vec{x}) = z f(\vec{x})$ , причём схема  $\widetilde{W}_f^1$  обладает следующими характеристиками:*

- 1)  $l\left(\widetilde{W}_f^1\right) = \mathcal{O}\left(2^{n/2}\right)$ ,  $w\left(\widetilde{W}_f^1\right) = \mathcal{O}\left(2^{n/2}\right)$ ,  $h\left(\widetilde{W}_f^1\right) = \mathcal{O}(m)$ ;
- 2)  $\hat{U}\left(\widetilde{W}_f^1\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right)$ ;
- 3)  $V\left(\widetilde{W}_f^1\right) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда  $n = 8t, m = k \cdot 2^{n/2}$ . Покажем, что тогда схема, изображённая на рис. 11 реализует оператор  $f$ .

Мы подаем входные переменные  $z, x_1, \dots, x_n$  на вход блоку дешифраторов  $D'_{n/8,8}$ , далее все эти провода подводим к каждому из  $k$  блоков

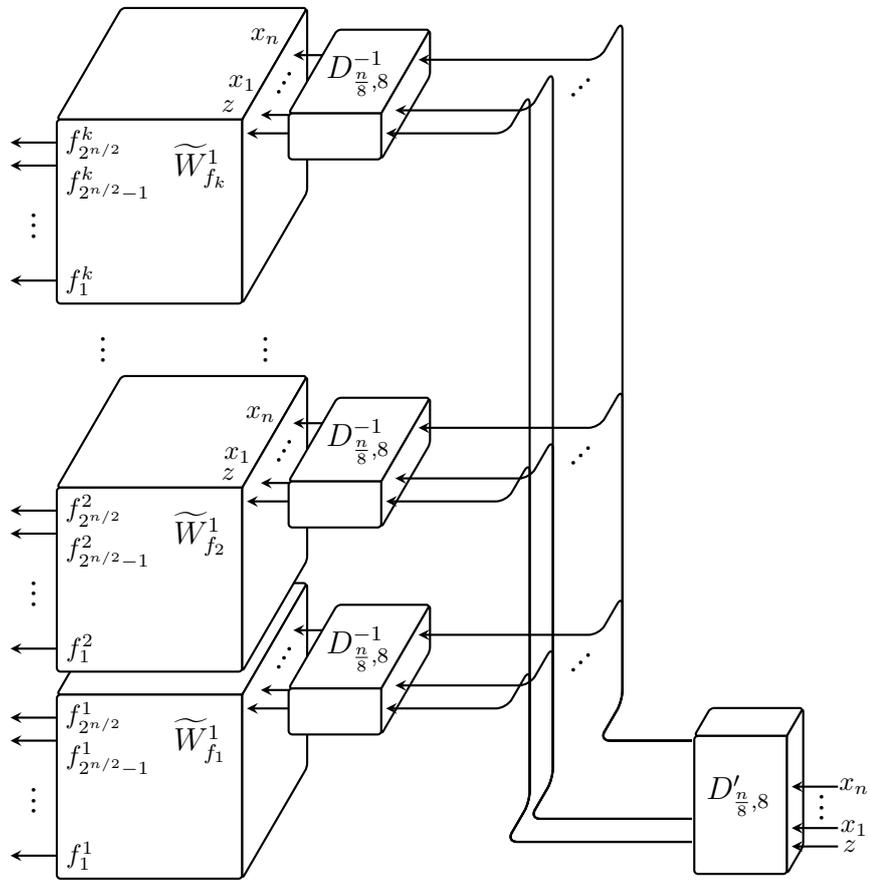


Рис. 11. Реализация блока  $\widetilde{W}_f^1$  ( $m > 2^{n/2}$ ).

обратных дешифраторов  $D_{n/8,8}^{-1}$ . «Расшифрованные» переменные  $z, x_1, \dots, x_n$  мы подаем на соответствующий блок  $\widetilde{W}_{f_i}^1$ , реализующий оператор  $f_i$  с  $n$  входами и  $m_0 = 2^{n/2}$  выходами. Далее, собирая все выходы блоков  $\widetilde{W}_{f_i}^1$ , получаем выходы оператора  $f$ .

Оценим параметры схемы  $\widetilde{W}_f^1$ .

$$\begin{aligned} l(\widetilde{W}_f^1) &= l(\widetilde{W}_{f_i}^1) + w(D_{n/8,8}^{-1}) + \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8}) + w(D'_{n/8,8}) = \\ &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}) + \mathcal{O}(n^2/8) + \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8}) + \mathcal{O}(n^2/16 + n) = \\ &= \mathcal{O}(2^{n/2}) + \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8}) = \mathcal{O}(2^{n/2}). \end{aligned}$$

$$w(\widetilde{W}_f^1) = w(\widetilde{W}_{f_i}^1) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}) = \mathcal{O}(2^{n/2}).$$

$$\begin{aligned} h(\widetilde{W}_f^1) &= k \cdot h(\widetilde{W}_{f_i}^1) = \frac{m}{2^{n/2}} \cdot \mathcal{O}(\sqrt[3]{m_0} \cdot 2^{n/3}) = \frac{m}{2^{n/2}} \cdot \mathcal{O}(2^{n/2}) = \\ &= \mathcal{O}(m). \end{aligned}$$

Оценим объём схемы  $\widetilde{W}_f^1$ :

$$V(\widetilde{W}_f^1) \leq l(\widetilde{W}_f^1) \cdot w(\widetilde{W}_f^1) \cdot h(\widetilde{W}_f^1) = \mathcal{O}(m \cdot 2^n).$$

Оценим потенциал схемы.

1) Блок дешифраторов  $D'_{n/8,8}$ :

$$U_1 \leq \hat{U}(D'_{n/8,8}) = \mathcal{O}(8n \cdot 2^{n/8} + n^2/8 \cdot 2^{n/8}) = \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}).$$

2) Далее на выходе из блока дешифраторов  $D'_{n/8,8}$  будут активны 8 проводов, которые мы подводим к блокам  $D_{n/8,8}^{-1}$ . Таким образом, имеем оценку:

$$U_2 \leq 8 \cdot \left( h(\widetilde{W}_f^1) + k \cdot \mathcal{O}(8 \cdot 2^{n/8}) \right) = \mathcal{O}(m).$$

3) Оценим потенциал всех  $k$  блоков  $D_{n/8,8}^{-1}$ :

$$U_3 \leq k \cdot \hat{U}(D_{n/8,8}^{-1}) = \frac{m}{2^{n/2}} \cdot \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}) = \mathcal{O}(m).$$

4) Оценим потенциал всех  $k$  блоков  $\widetilde{W}_{f_i}^1$ :

$$U_4 \leq k \cdot \hat{U}(\widetilde{W}_{f_i}^1) = \frac{m}{2^{n/2}} \cdot \mathcal{O}\left(\frac{m_0}{n} \cdot 2^{n/2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right).$$

В итоге, имеем следующую оценку потенциала схемы  $\widetilde{W}_f^1$ :

$$\begin{aligned} \hat{U}(\widetilde{W}_f^1) &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \\ &= \mathcal{O}(n^2 \cdot 2^{n/8}) + \mathcal{O}(m) + \mathcal{O}(m) + \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right) = \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем верное утверждение теоремы в случае  $n = 8t, m = k2^{n/2}$ . Если же  $n = 8t + r, m = k2^{n/2} + l$ , где  $r = 1 \dots 7, l = 1 \dots (2^{n/2} - 1)$ , то построим схему для  $n = 8t + 8, m = (k + 1)2^{n/2}$  и на последние  $8 - r$  входов подадим константу 0. Заметим, что в данном случае получим искомую схему и константы в оценках увеличатся не более, чем в константу раз, а значит оценки по порядку останутся верными.  $\square$

В качестве следствия из леммы 14, леммы 15 и леммы 17 докажем теорему 2, для удобства обозначив  $K_f = \widetilde{W}_f$ .

**Теорема 2.** *Для любого булева оператора  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ , существует объёмная схема  $K_f \in T_{\text{near}}$  со входами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на  $m$  выходах которой реализуется оператор  $f$ , причём схема  $K_f$  обладает следующими характеристиками:*

1) Если  $m \leq n$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

2) Если  $n < m \leq 2^{n/2}$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(\sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

3) Если  $m > 2^{n/2}$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } l(K_f) &= \mathcal{O}(2^{n/2}), \quad w(K_f) = \mathcal{O}(2^{n/2}), \\ h(K_f) &= \mathcal{O}(m); \\ \text{б) } \hat{U}(K_f) &= \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot 2^{n/2}\right); \\ \text{в) } V(K_f) &= \mathcal{O}(m \cdot 2^n). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Построим схему  $K_f$ , используя лемму 14 при  $m \leq n$ , лемму 15 при  $n < m \leq 2^{n/2}$  или лемму 17 при  $m > 2^{n/2}$ . Подадим в схеме  $\widetilde{W}_f^1$  на вход  $z$  константу 1. Полученная таким образом схема  $K_f$  реализует оператор  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на всех наборах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и её параметры остаются такими же по порядку, как и у схемы  $\widetilde{W}_f^1$ .  $\square$

В качестве следствия из теорем 1 и 2 докажем утверждение.

**Следствие 2.** Для почти всех  $f \in P_2(n, m)$ , при  $m \geq n, n \rightarrow \infty, \log_2(m) = o(2^n)$  верно равенство:

$$U_{T_{\text{near}}}(f) = \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right).$$

*Доказательство.* Так как согласно теореме 2 для любого оператора  $f \in P_2(n, m)$  существует объёмная схема  $K_f \in T_{\text{near}}$ , такая, что  $\hat{U}(\widetilde{W}_f) = \mathcal{O}\left(\frac{m}{n} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot 2^{n/3}\right)$ , то

$$U_{T_{\text{near}}}(f) \leq \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right).$$

Покажем, что выполнено условие теоремы 1. Так как длина  $h$  дерева выходов минимальна, то она равна  $\mathcal{O}(m)$ ,  $d = 2^n$ . Условия  $n \log_2 n = o(d)$ ,  $m = 2^{o(d)}$  выполнены. Тогда условие  $\sqrt[3]{md} \geq h$  можно переписать как  $m \leq 2^{n/2}$  (в случае  $h = \sqrt[3]{md}$  нижняя оценка одинакова, поэтому его тоже можно включить). Таким образом из теоремы 1 получаем оценку:

$$U_{T_{\text{near}}}(f) \geq \Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right).$$

Соединив вместе две оценки, получим необходимое утверждение. □

## Список литературы

- [1] Muller D.E., “Complexity in Electronics Switching Circuits”, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5**, no. 1 (1956), 15–19.
- [2] Вайнцивайг М.Н., “О мощности схем из функциональных элементов”, *Докл. АН СССР*, **Т. 139**, № 2 (1961), 320–323.
- [3] Лупанов О.Б., “Об одном подходе к синтезу управляющих систем – принципе локального кодирования”, *Проблемы кибернетики*, **14** (1965), 31–110.
- [4] Кравцов С.С., “О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 285–293.
- [5] Коршунов А.Д., “Об оценках сложности из объёмных функциональных элементов и объёмных схем из функциональных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **19** (1967), 275–283.

- [6] Касим-Заде О.М., “Об одной мере сложности схем из функциональных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **38** (1981), 117–179.
- [7] Шкаликowa Н.А., “О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов”, *Математические вопросы кибернетики*, **2** (1989), 177–197.
- [8] Андреев А.Е., Вихлянцев И.А., “Оценки длины кода для схем из функциональных элементов”, *Дискретная математика*, **6:4** (1994), 10–20.
- [9] Шуткин Ю.С., “Об одновременной минимизации объёмной и временной сложности контактных и вентильных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **14, № 1-4** (2010), 595–615.
- [10] Чашкин А.В., “Дискретная математика”, *Академия Москва*, (2012), 352.
- [11] Калачёв Г.В., “Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **18:2** (2014), 279–322.
- [12] Калачёв Г.В., “Порядок мощности плоских схем, реализующих булевы функции”, *Дискретная математика*, **26:1** (2014), 49–74.
- [13] Калачёв Г.В., “Об одновременной минимизации площади, мощности и глубины плоских схем, реализующих частичные булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20:2** (2016), 203–266.
- [14] Калачёв Г.В., “Об оценках мощности плоских схем для замкнутых классов булевых функций”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20:3** (2016), 52–57.
- [15] Калачёв Г.В., “Оценки мощности плоских схем, реализующих функции с ограниченным числом единиц”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21:1** (2017).
- [16] Калачёв Г.В., “Оценки мощности плоских схем, реализующих монотонные функции”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **21:2** (2017).
- [17] Ефимов А.А., “Верхняя оценка энергопотребления в классе объёмных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23:1** (2019), 117–132.

- [18] Ефимов А.А., “Верхняя оценка энергопотребления объемных схем, реализующих булевы операторы”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23:2** (2019), 105–124.
- [19] Жуков В.В., Ложкин С.А., “Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем”, *Дискретная математика*, **31:1** (2019), 99–110.
- [20] Сытдыков Т.Р., “Сложность синтеза многомерных прямоугольных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23:3** (2019), 61–80.
- [21] Сытдыков Т.Р., Калачёв Г.В., “Сложность многослойных d-мерных схем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25:2** (2021), 131–154.

**Potential estimates for a class of volume circuits with near outputs.**

**Efimov A.A.**

In this paper, volume circuits are considered, which are the embeddings of circuits of functional elements in space. The class  $T_{\text{near}}$  of circuits where the outputs are located side by side was considered. For this class, the lower and upper estimates of the potential are obtained. Potential is a measure of power equal to the number of circuit elements that produce one on a given input. In particular, it is shown that for Boolean operators with  $n$  inputs and  $m$  outputs, the order of the Shannon function for the  $T_{\text{near}}$  circuit class is  $\Theta\left(\frac{m}{n} \cdot \min^{1/3}(m, 2^{n/2}) \cdot 2^{n/3}\right)$  for  $m \geq n$ ,  $\log_2(m) = o(2^n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Keywords:** circuits from functional elements, volume circuits, circuit power, potential.

**Список литературы**

- [1] Muller D.E., “Complexity in Electronics Switching Circuits”, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **EC-5**, no. 1 (1956), 15–19.
- [2] Weinzweig M.N., “On the power of circuits from functional elements”, *Reports of the USSR Academy of Sciences*, **T. 139**, № 2 (1961), 320–323.

- [3] Lupanov O.B., “On one approach to the synthesis of control systems - the principle of local coding”, *Problems of cybernetics*, **14** (1965), 31–110.
- [4] Kravtsov C.C., “On the implementation of logic algebra functions in one class of circuits from functional and switching elements”, *Problems of cybernetics*, **19** (1967), 285–293.
- [5] Korshunov A.D., “On complexity estimates from volumetric functional elements and volumetric schemes from functional elements”, *Problems of cybernetics*, **19** (1967), 275–283.
- [6] Kasim-Zadeh O.M., “On one measure of the complexity of schemes of functional elements”, *Problems of cybernetics*, **38** (1981), 117–179.
- [7] Shkalikova N.A., “On the implementation of Boolean functions by schemes of cellular elements”, *Mathematical problems of cybernetics*, **2** (1989), 177–197.
- [8] Andreev A.E., Vikhlyantsev I.A., “Code length estimates for schemes of functional elements”, *Discrete mathematics*, **6**:4 (1994), 10–20.
- [9] Shutkin Y.S., “On simultaneous minimization of volume and time complexity of contact and valve circuits”, *Intelligent systems*, **14**, № 1-4 (2010), 595–615.
- [10] Chashkin A.V., “Discrete mathematics”, *Academy Moscow*, (2012), 352.
- [11] Kalachev G.V., “Lower bounds for the potential of flat circuits realizing partial Boolean operators”, *Intelligent systems*, **18**:2 (2014), 279–322.
- [12] Kalachev G.V., “Power order of planar circuits that implement Boolean functions”, *Discrete mathematics*, **26**:1 (2014), 49–74.
- [13] Kalachev G.V., “On the simultaneous minimization of area, power, and depth of planar circuits realizing partial Boolean operators”, *Intelligent systems*, **20**:2 (2016), 203–266.
- [14] Kalachev G.V., “On estimates for the potential of planar circuits for closed classes of Boolean functions”, *Intelligent systems*, **20**:3 (2016), 52–57.
- [15] Kalachev G.V., “Estimates for the potential of planar circuits realizing functions with a limited number of ones”, *Intelligent systems*, **21**:1 (2017).

- [16] Kalachev G.V., “Estimates for the potential of planar circuits implementing monotone functions”, *Intelligent systems*, **21**:2 (2017).
- [17] Efimov A.A., “Upper estimate of potentialn in the class of volumetric circuits”, *Intelligent systems*, **23**:1 (2019), 117–132.
- [18] Efimov A.A., “Upper bound for potential of volumetric circuits implementing Boolean operators”, *Intelligent systems*, **23**:2 (2019), 105–124.
- [19] Zhukov V.V., Lozhkin S.A., “Asymptotically best method for designing Boolean recursive circuits”, *Discrete mathematics*, **31**:1 (2019), 99–110.
- [20] Sytdykov T.R., “Complexity of synthesis of multidimensional rectangular schemes”, *Intelligent systems*, **23**:3 (2019), 61–80.
- [21] Sytdykov T.R., Kalachev G.V., “Complexity of multilayer d-dimensional circuits”, *Intelligent systems*, **25**:2 (2021), 131–154.