

# Обратная связь в рекуррентных схемах

Н. Ф. Алексиадис<sup>1</sup>, В. С. Половников<sup>2 5</sup>, А. А. Часовских<sup>3 5</sup>,  
В. Г. Шишляков<sup>4</sup>

Показано, что при некоторых естественных ограничениях на элементный базис для любой рекуррентной схемы с фиксированным количеством входов можно построить функционально эквивалентную ей схему в том же базисе с использованием операций суперпозиции и не более чем двукратного применения операции обратной связи при линейном росте числа используемых задержек по сравнению с исходной схемной реализацией. Таким образом, доказана линейность порядка роста памяти при переходе к оптимальной (по количеству задержек) схеме с не более чем двумя обратными связями. В структуре построенных в работе рекуррентных схем с не более чем двумя обратными связями выделяются модули кратковременной и долгосрочной памяти. Полученный результат, в частности, справедлив для класса конечных автоматов, а также для класса нейронных схем, построенных из элементов, содержащих вентили.

**Ключевые слова:** рекуррентные схемы, обратная связь, линейная оценка, вентили.

---

<sup>1</sup>*Алексиадис Никос Филиппович* — доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта института информационных и вычислительных технологий Национального исследовательского университета «МЭИ», e-mail: aleksiadis@yandex.ru.

Aleksiadis Nikos Philippovich — associate professor, National Research University «МЭИ», Institute of Information and Computation technologies, Chair of applied mathematics and artificial intelligence.

<sup>2</sup>*Половников Владимир Сергеевич* — научный сотрудник кафедры математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: polovnikov@intsys.msu.ru.

Polovnikov Vladimir Sergeevich — Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

<sup>3</sup>*Часовских Анатолий Александрович* — доцент кафедры математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: chasovskikh@mail.ru.

Chasovskikh Anatoly Alexandrovich — associate professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

<sup>4</sup>*Шишляков Владимир Геннадьевич* — аспирант кафедры математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bolotmaks@yandex.ru.

Shishlyakov Vladimir Gennad'evich — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

<sup>5</sup>Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № 075-15-2020-801).

## 1. Введение и основные понятия

Пусть  $E$  — некоторое поле, содержащее, как известно, 0 и 1. Схемы мы будем строить из элементов. Каждый элемент имеет конечное число входов, один выход и функционирует в дискретные моменты времени. В момент времени  $t$ ,  $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , на входы элемента поступают значения из  $E$ , а на выходе реализуется значение из  $E$ . Элемент с  $n$  входами называется функциональным, если в любой момент времени  $t$  значение его выхода зависит только от значений входов в момент  $t$ . Задержкой [1] называется элемент с одним входом и одним выходом, на выходе которого в начальный момент ( $t = 0$ ) реализуется его начальное состояние  $q_0$ ,  $q_0 \in E$ , а в другие моменты времени  $t$  на выход поступает значение входа в момент  $t - 1$ .

Индукцией по построению введем понятие рекуррентной схемы над множеством  $B$ , состоящим из функциональных элементов и всех задержек. Каждый элемент из  $B$  назовем рекуррентной схемой. Применяя к рекуррентным схемам операции композиции (переименования переменных без отождествления, отождествления переменных, подстановки, разветвления выхода, обратной связи) [1], получаем рекуррентные схемы над  $B$ .

Множество всех рекуррентных схем над  $B$  обозначим  $K(B)$ . В дальнейшем предполагаем, что с использованием функциональных элементов из  $B$  и операций суперпозиции без обратной связи можно реализовать все линейные функции, а также, что в  $K(B)$  содержится вентиль  $F$ , то есть схема с двумя входами, реализующая функцию  $\phi(x, y)$ , для которой выполнены равенства:  $\phi(x, 1) = x$  и  $\phi(x, 0) = 0$ .

Как нетрудно видеть, в этих предположениях при  $E = \{0, 1\}$  множество  $K(B)$  — все схемы конечных автоматов, а при  $E = \mathbb{R}$  и

$$\phi(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } y > 0 \\ 0, & \text{если } y \leq 0 \end{cases}$$

схемами из  $K(B)$  можно реализовать все кусочно-линейные нейронные функции, рассматриваемые в работе [2].

Множество схем из  $K(B)$ , которые можно получить из элементов  $B$  при применении не более чем  $r$  раз операции обратной связи, обозначим  $K_r(B)$ . Множество функций, реализуемых схемами из  $K(B)$  и  $K_r(B)$ , мы обозначим  $\Omega$  и  $\Omega_r$ , соответственно.

В работе [2] рассмотрен случай нейронных схем, когда  $E = \mathbb{R}$ , и показано, что в этом случае  $\Omega = \Omega_1$ .

Используя конструкции из этой работы, нетрудно получить следующее утверждение.

**Теорема 1.** При сформулированных выше ограничениях на множество элементов  $B$  выполнено:  $\Omega = \Omega_2$ .

Из этой теоремы, например, следует, что любой конечный автомат [1] можно реализовать схемой, построенной из элементов, реализующих полное в алгебре логики множество функций и задержек при использовании не более чем двух операций обратной связи.

Сложностью схемы  $S$  из  $K(B)$  мы называем количество задержек  $L(S)$  в этой схеме. Сложностью функции  $f$  из класса  $\Omega$  или  $\Omega_r$  называем сложность схемы с минимальной сложностью, реализующей эту функцию, и обозначаем  $L(f)$  или  $L_r(f)$ .

Используя конструкцию из работы [2], получаем следующий результат.

**Теорема 2.** В рассматриваемых ограничениях на  $B$  для заданного  $n$  найдется такая константа  $c$ , что для любой функции  $f, f \in \Omega$ , зависящей не более чем от  $n$  переменных, выполнено:  $L_2(f) \leq c \cdot L(f)^2$ .

При этом, как нетрудно видеть, справедливо неравенство:  $L(f) \leq L_2(f)$ .

Отметим, что имеет место улучшение полученной в теореме 2 оценки.

## 2. Основные результаты

**Теорема 3.** В рассматриваемых ограничениях на  $B$  для заданного  $n$  найдется такая константа  $c$ , что для любой функции  $f, f \in \Omega$ , зависящей не более чем от  $n$  переменных, выполнено:  $L_2(f) \leq c \cdot L(f)$ .

*Доказательство.* Пусть (1) – канонические уравнения [1] функции  $f$  с минимальным числом состояний, где  $\bar{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_k(t)) \in E^k$ ,  $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in E^n$ ,  $y(t) \in E$ ,  $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , а  $\varphi, \psi \in \Omega_0$ .

$$\begin{cases} \bar{q}(0) = (q_1(0), \dots, q_k(0)) = (q_1^0, \dots, q_k^0) \\ \bar{q}(t+1) = \varphi(\bar{q}(t), \bar{x}(t)) \\ y(t) = \psi(\bar{q}(t), \bar{x}(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Согласно [1], каноническим уравнениям (1) соответствует схема  $S_f$  из  $K(B)$ , изображенная на рис. 1. Данную схему будем называть канонической. Задержки с начальными состояниями  $q_i^0$  обозначены на схеме через  $Z_{q_i^0}$ .

Будем называть  $\bar{q}(t)$  – вектором состояний схемы,  $\bar{x}(t)$  – входами схемы, а  $y(t)$  – выходом схемы в момент времени  $t$ .

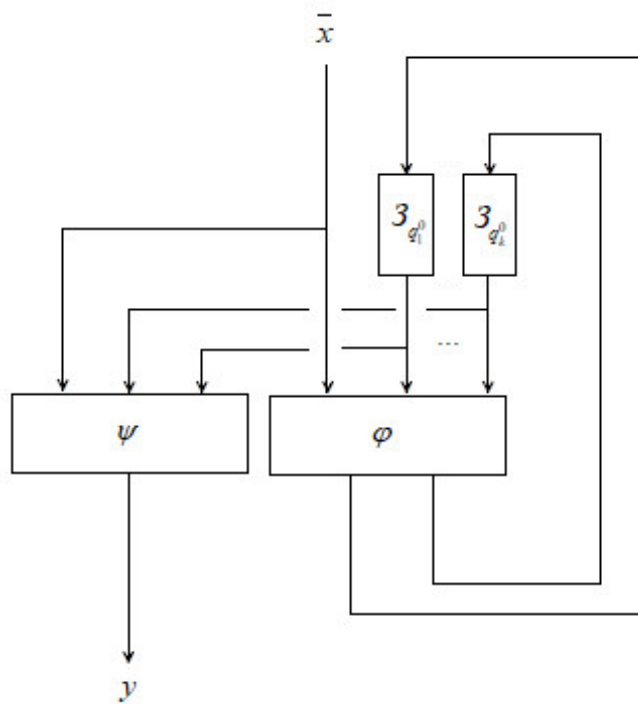


Рис. 1. Каноническая схема  $f \in \Omega$

Таким образом, при построении канонической схемы по уравнениям (1) требуется  $k$  задержек, которые обозначим  $q_1, \dots, q_k$ , с начальными состояниями  $(q_1^0, \dots, q_k^0)$  и  $k$  операций обратной связи.

Перестроим схему  $S_f$  так, чтобы в ней было две обратные связи. Новую схему назовем  $S_f^2$ .

Идейно новая схема  $S_f^2$  будет функционировать следующим образом: в определенные моменты времени  $t'$  производится фиксация (сохранение) вектора состояний  $\bar{q}(t') = (q_1(t'), \dots, q_k(t'))$  схемы  $S_f$ , затем данный вектор покомпонентно передается через одну из двух обратных связей новой схемы (по одной компоненте за такт).

После передачи компонент вектора состояний через обратную связь они будут аккумулироваться в "верхней части" схемы до тех пор, пока все компоненты вектора с зафиксированными состояниями не передадутся по обратной связи на "верхнюю часть" схемы.

Запоминая входы в моменты времени  $t', \dots, t' + \Delta - 1$  и используя вектор состояний в момент  $t'$ , сформированный в "верхней части" схемы, получаем новый вектор состояний схемы в момент времени  $t' + \Delta$ , где  $\Delta$  – число тактов, которые потребовались для передачи всех компонент

вектора состояний  $(q_1(t'), \dots, q_k(t'))$  через обратную связь и аккумулярования их на "верхней части" схемы.

Далее производится обновление состояния задержек, которые изначально передавали значения  $(q_1(t'), \dots, q_k(t'))$  на обратную связь. При обновлении состояний на задержки помещаются новые значения  $(q_1(t' + \Delta), \dots, q_k(t' + \Delta))$ . И со следующего такта описанная процедура покомпонентной передачи вектора состояний повторяется.

Таким образом, получается, что раз в  $\Delta$  тактов в схеме  $S_f^2$  на фиксированных соединениях (проводах) возникают значения, совпадающие со значениями состояний в канонической схеме  $S_f$ . Поэтому, подсоединив данные "провода" и вход  $\bar{x}(t)$  к соответствующим входам функции  $\psi$ , получим, что раз в  $\Delta$  тактов можно реализовать правильный выход  $y(t)$ .

Однако, конечной целью является получение на схеме  $S_f^2$  выхода  $y(t)$ , совпадающего с выходом схемы  $S_f$  в любой момент времени  $t, t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Для этого во всех тактах  $t = t' + i, i \in \{1, \dots, \Delta - 1\}$  будем вычислять значение  $y(t)$  в каждый момент времени  $t$ , используя состояния  $(q_1(t'), \dots, q_k(t'))$  в момент времени  $t'$  и входы  $\bar{x}(t), \dots, \bar{x}(t - i) = \bar{x}(t')$  при помощи функций  $\psi^i$  [1].

Теперь перейдем от идеи к подробному доказательству теоремы. Разобьем схему  $S_f^2$  на крупные блоки (модули) и рассмотрим общую структуру схемы (см. рис. 2). После чего перейдем к описанию каждого блока с доказательством того, что он работает корректно.

В схеме на рис. 2 тонкими линиями обозначаются связи ширины 1 (передача однокомпонентного вектора, или, что эквивалентно, элемента поля  $E$ ), более широкими линиями обозначаются связи с передачей многокомпонентных векторов в каждый конкретный момент времени.

Каждый блок имеет имя, а рядом с выходом каждого блока и рядом со входом схемы находится описание сигналов, которые появляются на выходе данного блока в каждый момент времени. Моменты времени представлены в виде  $t = k \cdot s + i$ , где  $k$  – размерность вектора состояний  $(q_1(t), \dots, q_k(t))$  в канонической схеме,  $s \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , а  $i \in \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$ . Моменты времени  $k \cdot s + i$ , когда  $s$  фиксировано, будем называть  $s$ -ой эпохой обновления состояния (или просто, эпохой). Также, чтобы подчеркнуть, что в основной логике значение какого-то компонента описываемого выхода не влияет на отображение, осуществляемое схемой, будем использовать обозначение "\*" . Данное выражение означает, что на месте, в котором оно используется, может стоять произвольный элемент поля  $E$ .

Обозначения выходов блоков унифицированы и имеют вид  $\bar{y}_B$ , где  $B$  - имя блока на схеме. Если потребуется взять  $i$ -ую компоненту вы-

хода блока  $B$  в момент времени  $t$ , то будем использовать выражение  $\bar{y}_B^{(i)}(t)$ . Если требуется взять несколько компонент  $i_1, \dots, i_l$  блока, то будем использовать выражение  $\bar{y}_B^{(i_1), \dots, (i_l)}(t)$ , полагая, по определению, что это вектор  $(\bar{y}_B^{(i_1)}(t), \dots, \bar{y}_B^{(i_l)}(t))$ .

Под обозначением  $\delta_{i,j}$  на рис. 2 понимается символ Кронекера  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ .

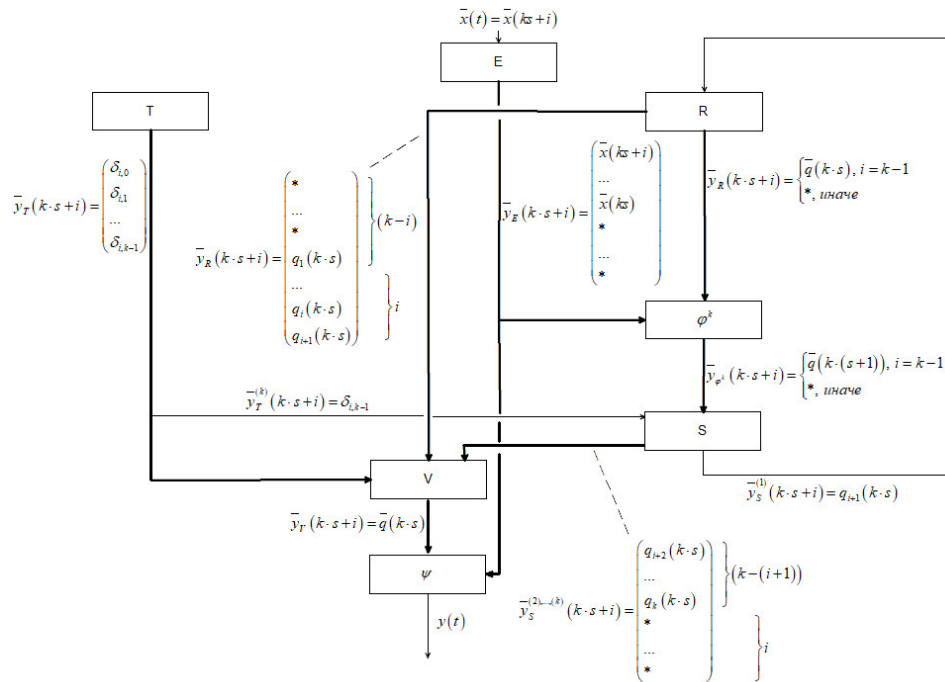


Рис. 2. Схема с двумя обратными связями и разбиением на блоки

Отметим, что, если каждый блок в  $S_f^2$  реализуется некоторой схемой, то  $S_f^2$  – тоже схема, так как вся схема может быть построена из этих блоков с использованием операции подстановки, обратной связи и, в некоторых случаях (блоки  $\varphi^k, S$ ), отождествления переменных.

Далее подробнее рассмотрим блоки схемы, изображенной на рис. 2.

• **Блок Т.** Данный блок является таймером и возвращает в каждый момент времени  $k$ -мерный вектор  $(\bar{y}_T^{(1)}, \dots, \bar{y}_T^{(k)}) = (\tau_0(t), \dots, \tau_{k-1}(t)) = (\delta_{i,0}, \delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,k-1})$ , в котором при любом  $t = k \cdot s + i$  содержится един-

ственная единица, стоящая на месте  $\tau_i(t)$  при любом  $s = 0, 1, \dots$  (в любой эпохе).

Таким образом, данный блок реализует счетчик итераций внутри одной эпохи. В данной теореме, чтобы не усложнять и не запутывать доказательство, реализуем его при помощи схемы с одной обратной связью и  $k$  задержками (см. рис. 3).

Мы не производим оптимизацию числа задержек в данном блоке, так как нам важна оценка по порядку числа задержек в схеме  $S_f^2$ . Данная реализация не портит порядок оценки, а оптимизация числа задержек в данном блоке не повлияет на порядок итоговой оценки. Хотя следует отметить, что данный блок может быть оптимизирован. Даже в общем случае можно, очевидно, обойтись  $\lceil \log_2(k) \rceil$  задержками, а в частном случае, когда  $E = \mathbb{R}$  можно обойтись реализацией данного блока с нулевым числом задержек и без обратных связей взамен увеличения размерности вектора состояний на 1 в канонической схеме [2].

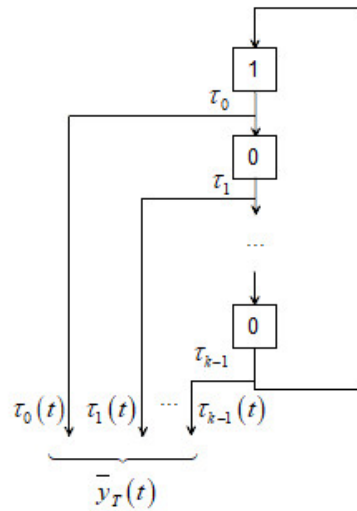


Рис. 3. Реализация схемы блока-таймера  $\mathbf{T}$ . Задержки обозначены квадратами, внутри квадрата обозначено начальное состояние задержки

Очевидно, что

$$\bar{y}_T(k \cdot s + i) = (\tau_0(k \cdot s + i), \dots, \tau_{k-1}(k \cdot s + i)) = (\delta_{i,0}, \delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,k-1}) \quad (2)$$

Другими словами, при  $i = 0, 1, \dots, k - 1$  выходом схемы, реализующей блок  $\mathbf{T}$ , является вектор из  $E^k$  с единственной ненулевой компонентой  $\tau_i(k \cdot s + i)$  и нулями на остальных компонентах, то есть  $\bar{y}_T(k \cdot s + i) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i \text{ позиция}}, 0, \dots, 0)$ .

• **Блок Е.** Блок **Е**, который мы будем также называть блоком краткосрочной памяти, представляет собой линию задержек с отводами [3], сохраняющим все входы, пришедшие на схему с начала эпохи. Выходы данного блока передаются на функции  $\varphi^j, \psi^j, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , используемые далее в схеме  $S_f^2$ .

Говоря формально, на вход блока **Е** приходит значение  $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , а на выходе требуется получить значения  $\bar{x}(t), \dots, \bar{x}(t - (k - 1))$ .

Для реализации блока **Е** рассмотрим вспомогательные блоки  $E_j, j \in 1, \dots, n$ , схемы которых изображены на рис. 4.

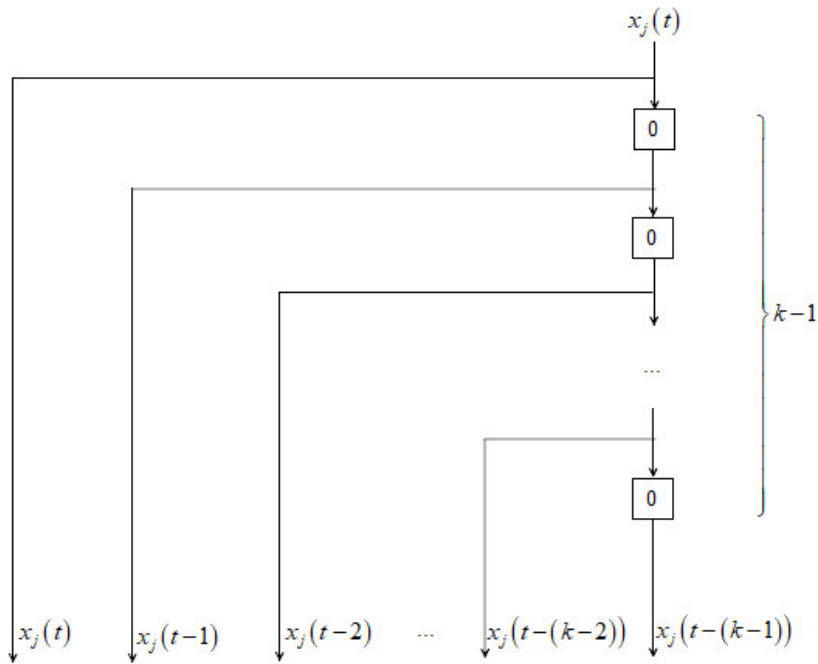


Рис. 4. Реализация схемами блоков  $E_j, j \in 1, \dots, n$

Очевидно, что каждый блок  $E_j$  принимает на вход значение  $x_j(t)$ , являющееся  $j$ -ой компонентой вектора  $\bar{x}(t)$ , и выдает на выходах  $x_j(t), x_j(t-1), \dots, x_j(t-(k-1))$  при  $t \geq k-1$ . Также очевидно, что при  $t < k-1$  блоком  $E_j$  возвращаются значения  $\underbrace{x_j(t), \dots, x_j(1), x_j(0)}_{t+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-t-1}$ .

Но тогда, представляя  $t$ , как  $t = k \cdot s + i$ , получаем, что каждый блок  $E_j$  в момент времени  $t$  возвращает значения  $x_j(k \cdot s + i), \dots, x_j(k \cdot s + i -$



$(k - 1)$ ) при  $t \geq k - 1$  и значения  $\underbrace{x_j(i), \dots, x_j(1), x_j(0)}_{i+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-i-1}$  в случае  $t < k - 1$ .

Выделяя в случае  $t \geq k - 1$  первые  $i + 1$  компонент вектора  $x_j(k \cdot s + i), \dots, x_j(k \cdot s + i - (k - 1))$ , получаем при любом  $t = k \cdot s + i$  вектор  $\underbrace{x_j(k \cdot s + i), \dots, x_j(k \cdot s)}_{i+1}, \underbrace{*, \dots, *}_{k-i-1} = \underbrace{x_j(k \cdot s + i), \dots, x_j(k \cdot s)}_{i+1}, \underbrace{*, \dots, *}_{k-i-1}$  на выходе блока  $E_j$ .

Схемы блоков  $E_j, j \in \{1, \dots, n\}$  будем сокращенно обозначать так, как это сделано на рис. 5.

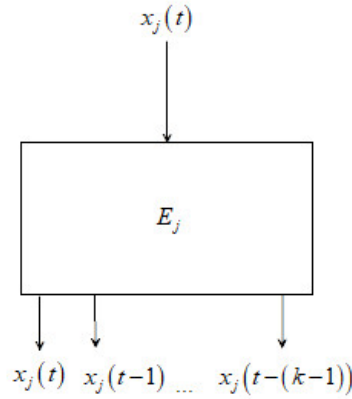


Рис. 5. Обозначение схем блоков  $E_j, j \in 1, \dots, n$

Из блоков  $E_j, j \in \{1, \dots, n\}$  составим схему блока **Е**. Схема данного блока изображена на рис. 6.

Но тогда, очевидно, что блок **Е** в каждый момент времени  $t = k \cdot s + i$  возвращает значения  $\underbrace{\bar{x}(k \cdot s + i), \dots, \bar{x}(k \cdot s)}_{i+1}, \underbrace{*, \dots, *}_{k-i-1}$ .

Также отметим, что при построении блока **Е** используется  $n(k - 1)$  задержек.

• **Блок сжатия S.** Задачей данного блока является сжатие вектора состояний до одной компоненты для дальнейшей передачи данных компонент через единственную обратную связь (по одной компоненте за такт).

При этом, в определенные моменты времени (в моменты  $t = k \cdot (s + 1), s = 0, 1, 2, \dots$ ), то есть при окончании эпохи, требуется уметь пере- считывать хранящиеся и циркулирующие по блокам **S, R,  $\varphi^k$**  состояния

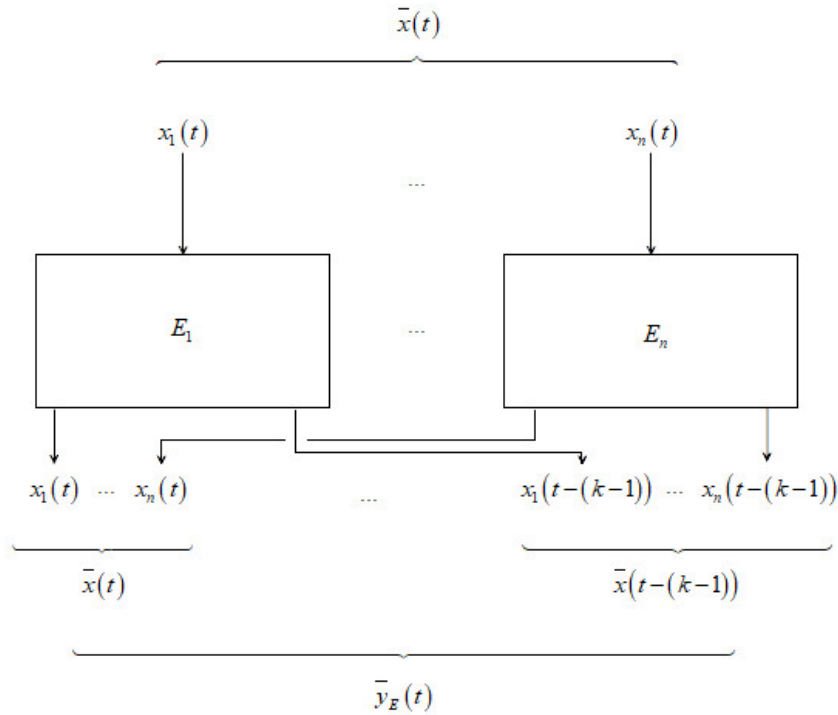


Рис. 6. Схема блока  $\mathbf{E}$

$\bar{q}(k \cdot s)$  в состоянии  $\bar{q}(k \cdot (s + 1))$  и обновлять их в блоке  $\mathbf{S}$  для того, чтобы в дальнейшем уже новые состояния циркулировали по контуру  $\mathbf{S}, \mathbf{R}, \varphi^k$ .

Для реализации схемы блока  $\mathbf{S}$  потребуется дополнительный элемент, который в дальнейшем будем называть блоком памяти (см. рис. 7 (а, б)). В данном блоке расположены три входа  $\tau', z, q$  и один выход  $y_m$ .

Суть данного блока состоит в том, что в зависимости от того, какое из значений  $\tau' \in \{0, 1\}$  придет на вход, в состоянии задержки, находящейся внутри данного блока, будет записано либо значение  $z$  (при  $\tau' = 1$ ), либо значение  $q$  (при  $\tau' = 0$ ).

Другими словами, блок памяти реализует следующую функцию:

$$y_m(t + 1) = m(\tau'(t), z(t), q(t)) = \begin{cases} z(t), & \text{если } \tau'(t) = 1, t \geq 1 \\ q(t), & \text{если } \tau'(t) = 0, t \geq 1 \\ a_0, & t = 0 \end{cases}, \text{ где } a_0 \in E$$

– начальное состояние задержки в момент времени  $t = 0$ .

Очевидно, что условный оператор, действующий по принципу  $y = \begin{cases} z, & \tau' = 1 \\ q, & \tau' = 0 \end{cases}$  можно реализовать следующей формулой:  $\phi(z, \tau') + \phi(q, 1 -$

$\tau'$ ) (предполагается, что  $\tau' \in \{0, 1\}$ ). Но тогда, для добавления временного лага, требуется добавить задержку. Таким образом, требуемую формулу можно представить в виде формулы (3).

$$\mathcal{Z}_{a_0}(\phi(z, \tau') + \phi(q, 1 - \tau')) \quad (3)$$

Представив формулу (3) в виде схемы, получаем рис. 7 (б), на котором изображена схема блока памяти. На рис. 7 (а) изображено сокращенное обозначение данного блока при построении схем.

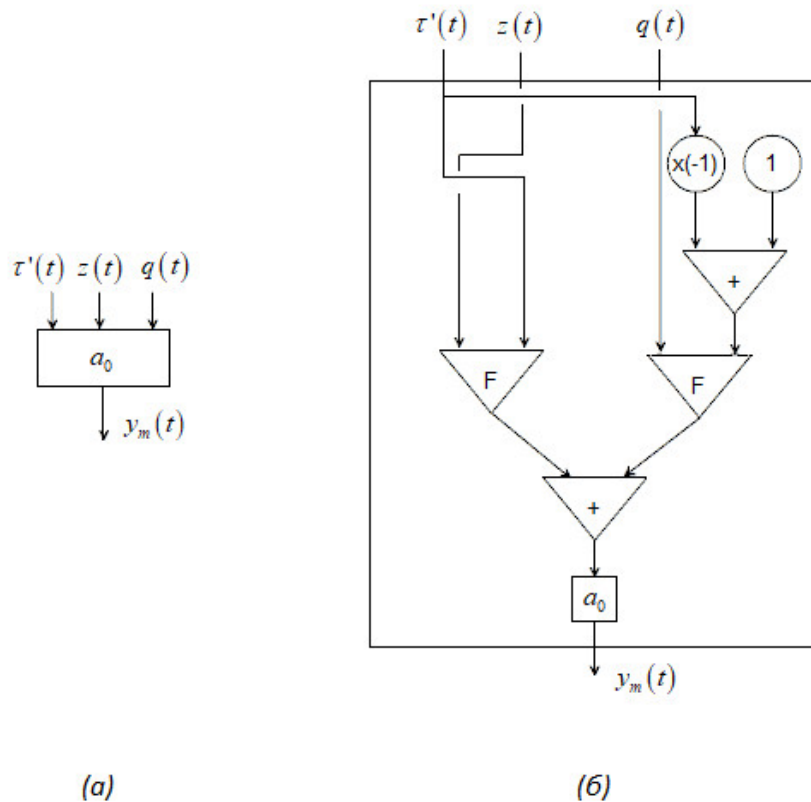


Рис. 7. Блок памяти

Учитывая схемное обозначение блока памяти, введенное на рис. 7 (а), рассмотрим схему, реализующую блок сжатия  $\mathbf{S}$  (см. рис. 8).

Покажем, что данная схема действительно реализует нужную нам функцию  $\bar{y}_S(k \cdot s + i) = (\bar{y}_S^{(1)}(k \cdot s + i), \dots, \bar{y}_S^{(k)}(k \cdot s + i)) = (q_{i+1}(k \cdot s), q_{i+2}(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s), *, \dots, *)$ , в предположении, что подключенные к ней блоки выдают такие выходы, как на схеме, изображенной на рис. 2.

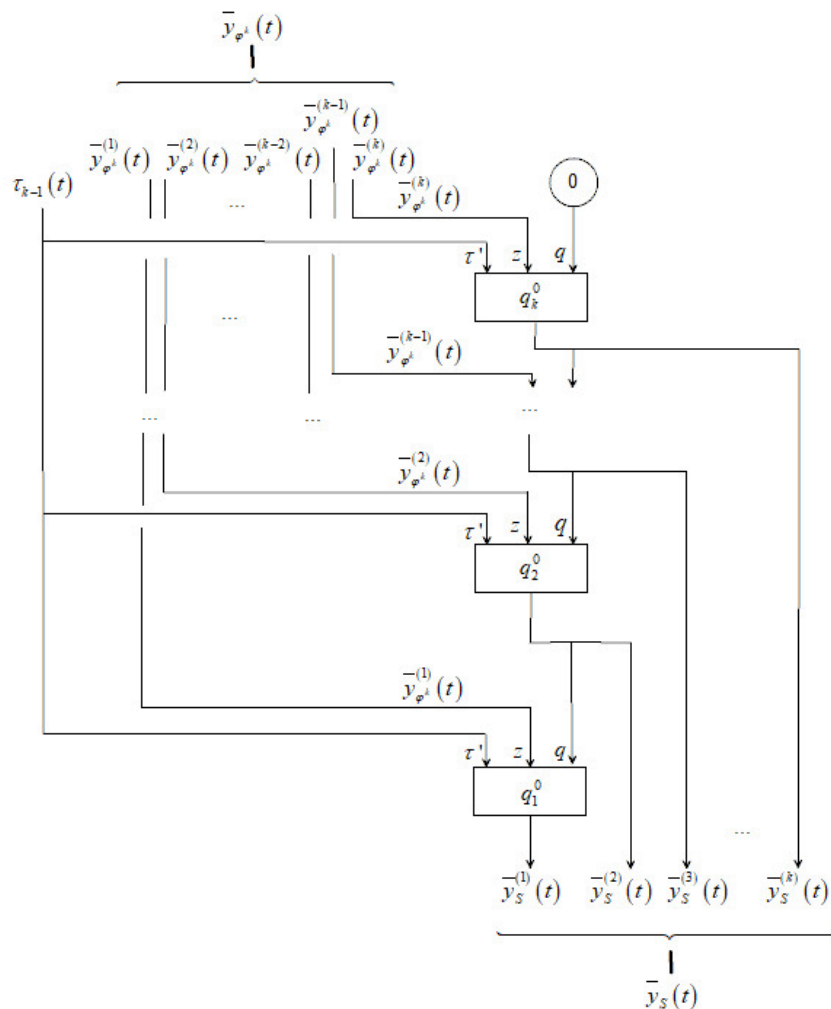


Рис. 8. Реализация блока сжатия **S**

В схеме на рис. 8 вход  $\tau_{k-1}(t)$  является последней компонентой выхода  $\bar{y}_T(t) = (\tau_0(t), \tau_1(t), \dots, \tau_{k-1}(t))$  блока **T** и, как говорилось ранее, если представить время  $t$  в виде разложения  $t = k \cdot s + i$ , то  $\tau_{k-1}(k \cdot s + i) = 1 \iff \delta_{i, k-1} = 1 \iff i = k - 1$ .

Таким образом, в моменты времени  $t = k \cdot s + i$  при  $i = k - 1$  на управляющие входы  $\tau'$  всех блоков памяти в схеме блока **S** подаются значения  $\tau' = 1$ .

Обозначим блоки памяти, имеющие начальные значения  $q_1^0, \dots, q_k^0$  на схеме из рис. 7, как  $q_1, \dots, q_k$ , соответственно.

Отсюда следует, что в блоки памяти  $q_1, \dots, q_k$  в данный момент времени  $t = k \cdot s + i, i = k - 1$  будут записаны значения со входов типа  $z$  на данных блоках, которые совпадают с  $\bar{y}_{\varphi^k}^{(1)}(k \cdot s + i), \dots, \bar{y}_{\varphi^k}^{(k-1)}(k \cdot s + i), \bar{y}_{\varphi^k}^{(k)}(k \cdot s + i)$ , соответственно.

При этом, согласно общей идее, блок  $\varphi^k$  возвращает в рассматриваемый момент времени  $t = k \cdot s + i$  при  $i = k - 1$  значения  $\bar{q}(k \cdot (s + 1)) = (q_1(k \cdot (s + 1)), \dots, q_k(k \cdot (s + 1)))$ , где  $q_j(k \cdot (s + 1)), j = 1, \dots, k$  – значения состояний в момент времени  $k \cdot (s + 1)$  у канонической схемы рассматриваемой функции  $f$ . Поэтому  $\bar{y}_{\varphi^k}(k \cdot s + i) = \bar{q}(k \cdot (s + 1))$  при  $i = k - 1$ .

Из сказанного вытекает, что в моменты времени  $t = k \cdot s + i, i = k - 1$  на задержках в блоках памяти  $q_1, \dots, q_k$  будут храниться значения  $q_1(k \cdot (s + 1)), \dots, q_k(k \cdot (s + 1))$ , соответственно. При этом, согласно устройству блоков памяти, в момент времени  $k \cdot (s + 1)$  блоки  $q_1, \dots, q_k$  выдадут значения, хранящиеся на задержках, то есть значения  $q_1(k \cdot (s + 1)), \dots, q_k(k \cdot (s + 1))$ , соответственно.

Учитывая, что блоки памяти  $q_1, \dots, q_k$  в начальный момент времени  $t = 0$  инициализированы корректными значениями (совпадающими со значениями компонент состояний в исходной схеме в момент времени  $t = 0$ ), получаем, что при  $t = 0$  блоки памяти подадут на выход корректные значения  $(q_1^0, \dots, q_k^0) = (q_1(0), \dots, q_k(0))$ .

Таким образом, показано, что в моменты времени  $t = k \cdot s$  блоки  $q_1, \dots, q_k$  выдают значения  $q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s)$ , соответственно. При этом на обратную связь схемы  $S_f^2$  идет только выход блока  $q_1$ , поэтому в моменты времени  $t = k \cdot s$  на обратную связь будет идти значение  $q_1(k \cdot s)$ , которое совпадает, по определению, со значением  $q(k \cdot s)$  в каждый из моментов времени  $t = k \cdot s$ .

Отметим, что на блок **V** от блока **S** идут все оставшиеся выходы  $\bar{y}_S^{(2)}(t), \dots, \bar{y}_S^{(k)}(t)$  и в момент времени  $t = k \cdot s$  данные значения совпадают с вектором  $(q_2(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s)) = (q_{i+2}(k \cdot s), \dots, q_{i+k}(k \cdot s))$ , который, очевидно, укладывается (принадлежит) в требуемую на рис. 2 последовательность значений  $(q_{i+2}(k \cdot s), \dots, q_{i+k}(k \cdot s), *, \dots, *)$ .

Покажем, что во все остальные моменты времени схема продолжит выдавать корректные результаты.

Действительно, в моменты времени  $t = k \cdot s + i, i \in \{1, \dots, k - 1\}$  все блоки памяти будут выдавать значения, хранящиеся в их задержках в моменты времени  $t = k \cdot s + i, i \in \{0, \dots, k - 2\}$ . Но в рассматриваемые моменты времени значение  $\tau_{k-1}(t) = 0$ , поэтому в состоянии задержек на блоках памяти будут записываться входы типа  $q$ , которые подключены к выходам предыдущих блоков памяти для блоков  $q_1, \dots, q_{k-1}$  и генератору нуля для блока  $q_k$ . Так как 0 – линейная функция, то она, очевидно, представима в виде схемы без обратных связей.

Отсюда немедленно вытекает, что в моменты  $t = k \cdot s + i$ ,  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  на выходе блока  $q_1$  будут появляться значения, реализуемые на выходах блоков  $q_{1+i} = q_{i+1}$  в момент времени  $t = k \cdot s$ . Но в момент времени  $t = k \cdot s$  на выходе каждого блока  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  реализуются значения  $q_j(k \cdot s)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , соответственно.

Таким образом, в моменты времени  $t = k \cdot s + i$ ,  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  на выходе блока  $q_1$  будут появляться значения  $q_{i+1}(k \cdot s)$ , что доказывает корректность работы выхода, идущего на обратную связь, у описанной на рис. 8 схемы блока **S**.

Рассмотрим, что будет происходить с остальными выходами  $\bar{y}_S^{(2)}(k \cdot s + i)$ , ...,  $\bar{y}_S^{(k)}(k \cdot s + i)$  блока в моменты времени  $t = k \cdot s + i$ ,  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . По аналогии с блоком  $q_1$ , на выходах остальных блоков  $q_b$ ,  $b \in \{2, \dots, k\}$  будут появляться значения, стоящие на блоках  $q_{b+i} = q_{i+b}$  в момент времени  $t = k \cdot s$ , если  $i + b \leq k$ . В случае же  $i + b > k$  выходы на блоках  $q_{i+b}$ , очевидно, будут нулевыми.

Так как в момент времени  $t = k \cdot s$  блоки  $q_{i+b}$  выдают значения  $q_{i+b}(k \cdot s)$ , то из сказанного выше получаем, что блоки  $q_b$  выдают значения

$$\begin{cases} q_{i+b}(k \cdot s), & i + b \leq k \\ 0, & i + b > k \end{cases}, \text{ в моменты времени } t = k \cdot s + i, \quad i \in$$

$\{1, \dots, k-1\}$ . Последнее, очевидно, укладывается в последовательность  $(\bar{y}_S^{(2)}(k \cdot s + i), \dots, \bar{y}_S^{(k)}(k \cdot s + i)) = (q_{i+2}(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s), *, \dots, *)$ .

Причем отметим, что на выход данного блока, подсоединенного к обратной связи, идет всегда одно значение, поэтому доказано, что обратная связь на рис. 2 единственная (вторая обратная связь спрятана в блоке **T** и, как мы увидим далее, ни в одном другом блоке обратных связей нет).

Также в дальнейшем пригодится знание о числе задержек в блоке **S**. Очевидно, что их столько же, сколько блоков памяти в схеме на рис. 8, то есть  $k$  штук.

• **Блок распараллеливания R.** Данный блок требуется для того, чтобы принимать состояния, переданные блоком сжатия через единственную обратную связь на укрупненной схеме, изображенной на рис. 2, сохранять их, а затем, в определенный момент времени, возвращать весь "перетекший" через обратную связь вектор  $\bar{q}(k \cdot s)$  и передавать его в блок  $\varphi^k$  для вычисления нового состояния схемы.

Представим схему, реализующую этот блок. Данная схема изображена на рис. 9. На вход данной схемы поступает выход  $\bar{y}_S^{(1)}(k \cdot s + i)$  схемы **S**, переданный через обратную связь, который на рис. 9 обозначен, как  $q(t)$ .

На выходе схемы при  $t \geq k - 1$  возникают значения  $q(t), q(t - 1), \dots, q(t - (k - 1))$  в силу того, что в схеме используется  $k - 1$  задержка. Данные задержки названы  $q_{k+1}, \dots, q_{2k-1}$  (см. рис. 9).

В целом, не имеет значения, какими начальными состояниями инициализированы задержки, изображенные на схеме, поэтому, без ограничения общности, будем считать, что они инициализированы нулями поля  $E$ .

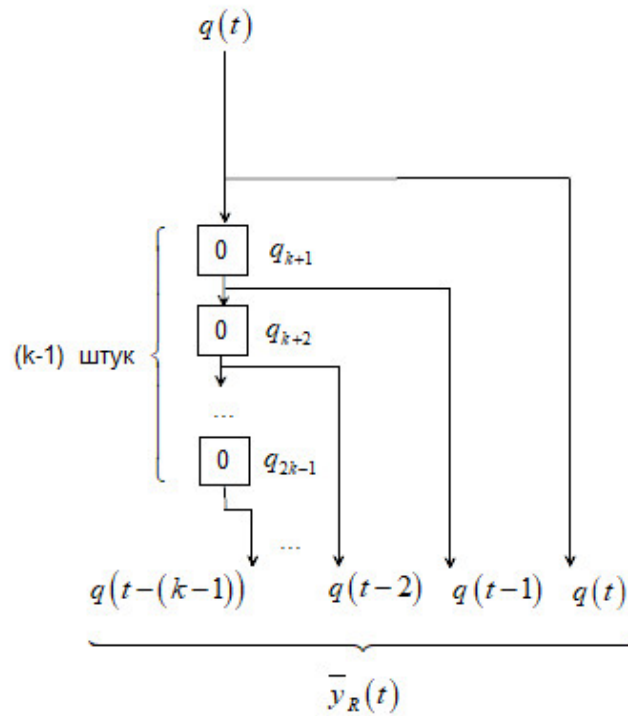


Рис. 9. Реализация блока распараллеливания  $\mathbf{R}$

Покажем теперь, что схема, изображенная на рис. 9 действительно реализует требуемую функцию  $\bar{y}_R(k \cdot s + i) = (*, \dots, *, q_1(k \cdot s), \dots, q_i(k \cdot s), q_{i+1}(k \cdot s))$  в предположении, что подключенные к ее входам блоки выдают такие выходы, как на схеме, изображенной на рис. 2.

Действительно, по ранее показанному, в каждый момент времени  $t = k \cdot s + i$  по обратной связи передается единственное значение  $q_{i+1}(k \cdot s)$ , где  $\bar{q}(k \cdot s) = (q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s))$  – корректное значение вектора состояний канонической схемы в момент времени  $t = k \cdot s$ .

Но тогда в момент времени при  $i = 0$  получаем, что  $q(t) = q_{i+1}(k \cdot s) = q_1(k \cdot s)$ . При этом состояние задержки  $q_{k+1}$  при  $i = 0$  станет равным  $q_{i+1}(k \cdot s) = q_1(k \cdot s)$ , поэтому на следующем такте, при  $i = 1$ ,  $q(t)$  станет

равным  $q_{i+1}(k \cdot s) = q_2(k \cdot s)$ , а  $q(t-1)$  станет равным состоянию, записанному в задержку  $q_{k+1}$  в предыдущий момент времени, то есть значению  $q_1(k \cdot s)$ .

Поступая аналогично ("проталкивая вниз" по задержкам блока **R** все ранее поступившие состояния), получаем, что при каждом  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  данный блок будет выдавать набор значений следующего вида:  $\bar{y}_R(k \cdot s + i) = (\bar{y}_R^{(1)}(k \cdot s + i), \dots, \bar{y}_R^{(k)}(k \cdot s + i)) = (q(t - (k-1)), \dots, q(t)) = (*, \dots, *, q_1(k \cdot s), \dots, q_i(k \cdot s), q_{i+1}(k \cdot s))$ .

При этом, в моменты времени при  $i = k-1$  на выходах  $q(t - (k-1)), \dots, q(t)$  появятся значения  $q_1(k \cdot s), \dots, q_{i+1}(k \cdot s) = q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s)$ , соответственно (так как в схеме на рис. 9 ровно  $k$  выходов, то все они получают заполненными).

Другими словами, при  $i = k-1$  имеем  $\bar{y}_R(k \cdot s + i) = (q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s)) = \bar{q}(k \cdot s)$ .

Таким образом, схема, изображенная на рис. 9, реализует правильную функцию  $\bar{y}_R(k \cdot s + i)$  (обладающую требуемыми свойствами на обоих выходах блока **R** в схеме, изображенной на рис. 2).

Отметим также, что в данном блоке была использована  $k-1$  задержка.

- Блок  $\varphi^k$ . В данном блоке реализуется единственная функция  $\varphi^k(\bar{q}(t - (k-1)), \bar{x}(t - (k-1)), \dots, \bar{x}(t))$ , которая определяется по рекуррентной формуле (4).

$$\begin{cases} \varphi^k(\bar{q}(t - (k-1)), \overbrace{\bar{x}(t - (k-1)), \dots, \bar{x}(t)}^k) = \\ \quad = \varphi(\varphi^{k-1}(\bar{q}(t - (k-1)), \bar{x}(t - (k-1)), \dots, \bar{x}(t-1)), \bar{x}(t)) \\ \varphi^1(\bar{q}(t), \bar{x}(t)) = \varphi(\bar{q}(t), \bar{x}(t)) \end{cases} \quad (4)$$

В силу того, что  $\varphi(\bar{q}, \bar{x}) \in \Omega_0$ , а  $k$  – конечно, то  $\varphi^k \in \Omega_0$ , так как, очевидно, что схема функции  $\varphi^k$  является суперпозицией схем для функции  $\varphi(\bar{q}, \bar{x})$ .

Покажем, что схема функции  $\varphi^k$ , которую будем называть блоком  $\varphi^k$ , будет выдавать корректный выход  $\bar{y}_{\varphi^k}(k \cdot s + i) = \begin{cases} \bar{q}(k \cdot (s+1)), & i = k-1 \\ *, & \text{иначе} \end{cases}$  в любой момент времени  $t = k \cdot s + i$ .

Отметим сначала, что, по определению, функция  $\varphi^k$  возвращает по набору значений  $\bar{q}(t - (k-1)), \bar{x}(t - (k-1)), \bar{x}(t)$ , значение  $\bar{q}(t+1)$  [1].

Согласно рис. 2, входы блока  $\varphi^k$  подключены к блокам **R**, **E**, соответственно. Напомним, что блок **E** возвращает в момент времени  $t = k \cdot s + i$ ,  $i = k-1$  значения  $\bar{x}(t), \bar{x}(t-1), \dots, \bar{x}(t - (k-1)) \stackrel{t=k \cdot s + (k-1)}{=}$



$\bar{x}(k \cdot s + (k - 1)), \bar{x}(k \cdot s + (k - 2)), \dots, \bar{x}(k \cdot s)$ , а блок **R** возвращает в указанный момент времени  $t$  значения  $\bar{q}(k \cdot s)$ .

Подключим выходы  $\bar{x}(k \cdot s + (k - 1)), \bar{x}(k \cdot s + (k - 2)), \dots, \bar{x}(k \cdot s)$  блока **E** к блоку  $\varphi^k$  в нужном (обратном) порядке  $\bar{x}(k \cdot s), \dots, \bar{x}(k \cdot s + (k - 2)), \bar{x}(k \cdot s + (k - 1))$ .

Тогда имеем  $\varphi^k(\bar{q}(k \cdot s), \bar{x}(k \cdot s), \dots, \bar{x}(k \cdot s + (k - 2)), \bar{x}(k \cdot s + (k - 1))) \stackrel{def}{=} \bar{q}(k \cdot s + (k - 1) + 1) = \bar{q}(k \cdot s + k) = \bar{q}(k \cdot (s + 1))$ , откуда и следует доказываемое.

Отметим также, что при построении блока  $\varphi^k$  задержки не использовались.

• Блок **V**. Можно заметить, что в каждый момент времени  $t = k \cdot s + i$  на выходах блоков **S** и **R** всегда можно найти все значения  $q_j(k \cdot s)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Однако при изменении  $i \in \{0, \dots, k - 1\}$  значения  $q_j(k \cdot s)$ ,  $j = 1, \dots, k$  постоянно сдвигаются (то есть с изменением времени  $t$  начинают выдаваться с других выходов блоков **S**, **R**).

Сделаем так, чтобы вектор значений  $q_j(k \cdot s)$ ,  $j = 1, \dots, k$  выдавался в каждый момент времени с одних и тех же "проводов", то есть чтобы в схеме были "провода", дающие стабильный сигнал  $(q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s))$  (без искажений и сдвигов).

Эту задачу выполняет блок **V**. Формально, данный блок принимает почти все выходы блоков **S**, **R** (почти все, а не все, так как выходы данных блоков перекрываются (дублируются) в значении  $q_{i+1}(k \cdot s)$ ), содержащие "плавающие" значения  $q_j(k \cdot s)$ ,  $j = 1, \dots, k$  и выдает стабильное внутри каждой эпохи значение  $\bar{y}_V(k \cdot s + i) = \bar{q}(k \cdot s)$ .

Отметим, что на вход блока **V** передаются также сигналы с блока **T**. Данная мера является вынужденной и чисто технической.

Рассмотрим идею построения схемы блока **V**. Для начала, обозначим  $w_2(t), \dots, w_k(t)$  выходы блоков памяти  $q_2, \dots, q_k$  из блока **S** в момент времени  $t$ , а  $w_{k+1}(t), \dots, w_{2k-1}(t)$  – выходы задержек  $q_{k+1}, \dots, q_{2k-1}$  из блока **R** в момент времени  $t$ . Под  $w_1(t)$  будем понимать выход блока  $q_1$ . Данный выход, формально, принадлежит блокам **S**, **R** одновременно. Но мы будем полагать, что  $w_1(t)$  – выход блока **R**, что соответствует фактическим свободным входам и выходам блоков **S**, **R** (выход  $w_1(t)$  в блоке **S** подключен по обратной связи ко входу блока **R**, поэтому, фактически, он не является свободным выходом блока **S**).

Исходя из доказанных свойств сигналов на выходах в блоках **S**, **R** следует, что при  $t = k \cdot s + i$  выполняется формула (5).

$$\begin{aligned}
& (w_{2k-1-i+1}(k \cdot s + i), \dots, w_{2k-1}(k \cdot s + i), \\
& \quad w_1(k \cdot s + i), w_2(k \cdot s + i), \dots, w_{k-i}(k \cdot s + i)) = \\
& \quad = (q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s)) \quad (5)
\end{aligned}$$

В формуле (5) полагается, что, по определению,  $w_i(t), \dots, w_j(t) =$

$$\begin{cases} \emptyset, & j < i, \\ w_j(t), & i = j, \\ w_i(t), \dots, w_j(t), & j > i. \end{cases}$$

То есть, другими словами, при  $i = 0$  формула (5) принимает вид  $(w_1(k \cdot s + i), w_2(k \cdot s + i), \dots, w_k(k \cdot s + i)) = (q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s))$ , а при  $i = k - 1$  получаем  $(w_{2k-1-(k-1)+1}(k \cdot s + i), \dots, w_{2k-1}(k \cdot s + i), w_1(k \cdot s + i), \dots, w_{k-(k-1)}(k \cdot s + i)) = (q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s))$ , то есть  $(w_{k+1}(k \cdot s + i), \dots, w_{2k-1}(k \cdot s + i), w_1(k \cdot s + i)) = (q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s))$ .

Далее, рассмотрим блоки, составленные из элементов  $F$ , соответствующих функциям  $\phi(x, y)$ , и построенные над скользящими окнами  $(w_{2k-1-i+1}(t), \dots, w_{2k-1}(t), w_1(t), w_2(t), \dots, w_{k-i}(t))$ . Данные блоки изображены на рис. 10. Такие блоки будем называть еще  $\chi$ -многополосниками.

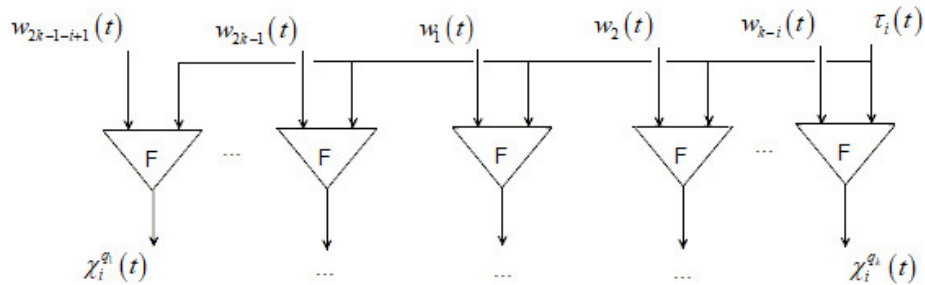


Рис. 10. Схема  $\chi$ -многополосника над скользящим окном

Рассмотрим принцип работы схемы на рис. 10. Так как элементов  $F$  в данной схеме ровно  $k$  штук и каждый элемент  $F$  дает ровно один выход в схеме, то получаем, что в схеме  $k$  штук выходов и каждый выход исходит из некоторого элемента  $F$ .

Далее, отметим, что  $\tau_i(t)$  – это  $i + 1$ -ая компонента вектора  $\bar{y}_T(t)$ , являющегося выходом блока **T**. По определению,  $\tau_i(t) = 1 \iff t = k \cdot s + i$ , где  $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$  подразумевается фиксированным числом, для которого строится рассматриваемый  $\chi$ -многополосник. Таким образом,

за одну эпоху только один раз на схему, изображенную на рис. 10, придет значение  $\tau_i(t) = 1$ .

Учитывая, что элемент  $F$  реализует функцию  $\phi(x, y)$ , обладающую теми свойствами, что  $\phi(x, 1) = x$  и  $\phi(x, 0) = 0$ , то получаем, что верно (6).

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, \forall i' \in \{0, \dots, i-1, i+1, \dots, k-1\} \chi_i^{q_j}(k \cdot s + i') = 0 \quad (6)$$

При этом, учитывая, что при  $t = k \cdot s + i$  верно (5), а также определение  $F$ , получаем, что при  $t = k \cdot s + i$  верно, что  $\chi_i^{q_j} = q_j(k \cdot s)$  для  $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ . А из (6) следует, что в противном случае (при  $t = k \cdot s + i'$ ,  $i' \neq i$ ) все выходы  $\chi_i^{q_j}(t)$  блока  $\chi$ -многополюсника с номером  $i$  равны нулю.

Таким образом,  $\chi$ -многополюсники являются носителями векторов правильных состояний  $\bar{q}(k \cdot s)$  в различные моменты времени одной эпохи.

В дальнейшем будем обозначать  $\chi$ -многополюсники так, как это сделано на рис. 11.

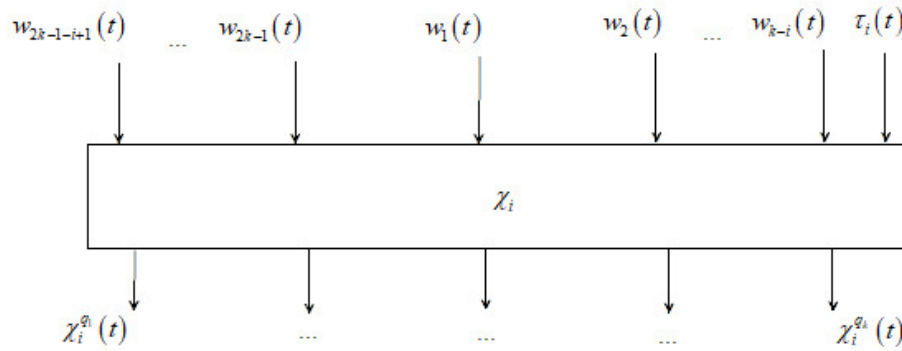


Рис. 11. Обозначение схемы  $\chi$ -многополюсника

Далее построим  $\chi$ -многополюсники для всех  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  и направим их выходы, соответствующие одним и тем же  $q_j$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ , в сумматор. Описываемая конструкция изображена на рис. 12.

Очевидно, что входы данной схемы соответствуют входам данного блока на рис. 2. Далее, покажем, что на выходах данного блока при любом  $t = k \cdot s + i$  будет появляться сигнал  $q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s)$ .

Так как у нас есть  $\chi$ -многополюсники, соответствующие всем  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , то при любом такте  $t = k \cdot s + i$  на выходах хотя бы одного из них будут появляться значения  $q_1(k \cdot s), \dots, q_k(k \cdot s)$ . Причем также по

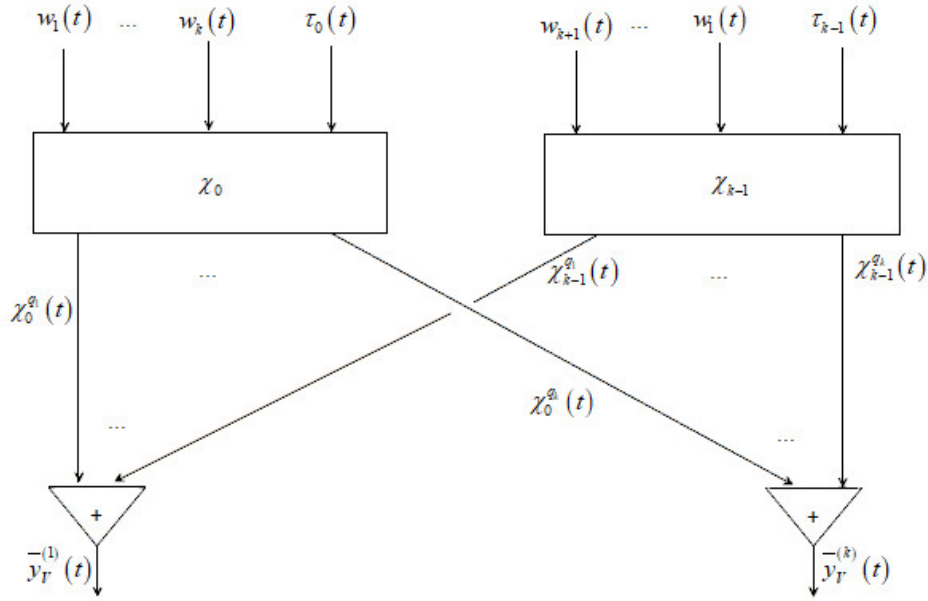


Рис. 12. Схема блока  $\mathbf{V}$

построению, все остальные  $\chi$ -многополюсники в данный фиксированный момент времени будут давать на всех своих выходах нули.

Но тогда, так как, по построению схемы  $\mathbf{V}$ , для любого  $j \in \{1, \dots, k\}$  верно, что  $\bar{y}_V^{(j)}(t) = \sum_{i' \in \{0, \dots, k-1\}} \chi_{i'}^{q_j}(t)$ , то, в силу вышесказанного,  $\bar{y}_V^{(j)}(k \cdot s + i) = \sum_{i' \in \{0, \dots, k-1\}} \chi_{i'}^{q_j}(t) = \chi_i^{q_j}(k \cdot s + i) = q_j(k \cdot s)$ . Откуда и следует доказываемое.

Отметим также, что при реализации данного блока не использовались задержки.

- Блок  $\psi$ . На блоке выпрямления  $\mathbf{V}$  в начале каждой эпохи появляется корректное состояние канонической схемы. Однако во все остальные моменты времени, то есть при  $t = k \cdot s + i$ ,  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , получается, что в описанной на данный момент части схемы нет корректного состояния  $\bar{q}(k \cdot s + i)$ , поэтому вычислить  $y(t)$ , как значение  $\psi(\bar{q}(t), \bar{x}(t))$  в произвольный момент времени мы не можем (так можно делать только в тактах, совпадающих с началом эпох). Блок  $\psi$  решает задачу вычисления  $y(t)$  в любой момент времени  $t = k \cdot s + i$ ,  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ .

Блок  $\psi$  строится на том свойстве, что по состоянию  $\bar{q}(t)$  и последовательности входов  $\bar{x}(t), \bar{x}(t+1), \dots, \bar{x}(t+T)$  можно вычислить значение  $y(t+T)$ . Данные вычисления производятся функциями  $\psi^{T+1}(\bar{q}(t), \bar{x}(t), \dots, \bar{x}(t+T))$ , канонические уравнения которых [1] записаны в выражении (7). В выражении (7) функции  $\varphi^{T-1}$  определяются аналогично функции  $\varphi^k$ , уравнения которой были записаны в выражении (4).

$$\begin{cases} \psi^T(\bar{q}(t-(T-1)), \overbrace{\bar{x}(t-(T-1)), \dots, \bar{x}(t)}^T) = \\ \quad = \psi(\varphi^{T-1}(\bar{q}(t-(T-1)), \bar{x}(t-(T-1)), \dots, \bar{x}(t-1)), \bar{x}(t)) \\ \psi^1(\bar{q}(t), \bar{x}(t)) = \psi(\bar{q}(t), \bar{x}(t)) \end{cases} \quad (7)$$

Перепишывая выражение (7), взяв  $t = k \cdot s + i$  и  $T = i + 1$ , получаем, что для вычисления  $y(t) = y(k \cdot s + i)$ , блок  $\psi$  должен принимать на вход значения  $\bar{q}(k \cdot s)$  и набор значений  $\bar{x}(k \cdot s), \dots, \bar{x}(k \cdot s + i)$ . Но значения  $\bar{x}(k \cdot s), \dots, \bar{x}(k \cdot s + i)$  выдаются в выходах блока  $\mathbf{E}$ , а значения  $\bar{q}(k \cdot s)$  выдаются блоком  $\mathbf{V}$ .

Таким образом, имеются все необходимые входы для вычисления блока  $\psi$  в каждый момент времени, поэтому остается схемно реализовать все функции  $\psi^i(\bar{q}(t-i+1), \bar{x}(t-i+1), \dots, \bar{x}(t))$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , а также реализовать правильный механизм выбора одного из данных значений в каждый момент времени внутри каждой эпохи.

Отметим сначала, что, так как  $\varphi^i \in \Omega_0$  и  $\psi \in \Omega_0$ , то  $\psi^i(\bar{q}(t-i+1), \bar{x}(t-i+1), \dots, \bar{x}(t)) \in \Omega_0$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , то есть для них существуют схемы из  $K_0(B)$ .

Теперь рассмотрим схему, изображенную на рис. 13.

Покажем, что схема, изображенная на рис. 13, на выходе всегда будет давать корректное значение  $y(t)$ , совпадающее с выходом канонической схемы в данный момент времени. Представим момент времени  $t$  в виде  $t = k \cdot s + i$ . Отметим, что, каждая функция  $\psi^{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  в данной схеме выдает нам значение  $\psi^{i+1}(\bar{q}(k \cdot s), \bar{x}(k \cdot s), \dots, \bar{x}(k \cdot s + i)) = y(k \cdot s + i)$  в момент времени  $k \cdot s + i$ .

При этом, так как все функции  $\psi^{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  есть в схеме, то в каждый момент времени  $k \cdot s + i$  одна из функций  $\psi^1, \dots, \psi^k$  выдает корректное значение  $y(k \cdot s + i)$ .

Отметим, что выход каждой функции  $\psi^{i+1}$  подсоединен к первому входу элемента  $F$ , второй вход которого подсоединен к значению  $\tau_i(t) \in \{0, 1\}$ , причем  $\tau_i(t) = 1 \iff t = k \cdot s + i$ . Отсюда следует, что на выходе элемента  $F$ , подсоединенного к функции  $\psi^{i+1}$ , возникает значение  $y(k \cdot s + i)$  в момент времени  $t = k \cdot s + i$  и 0 в противном случае.

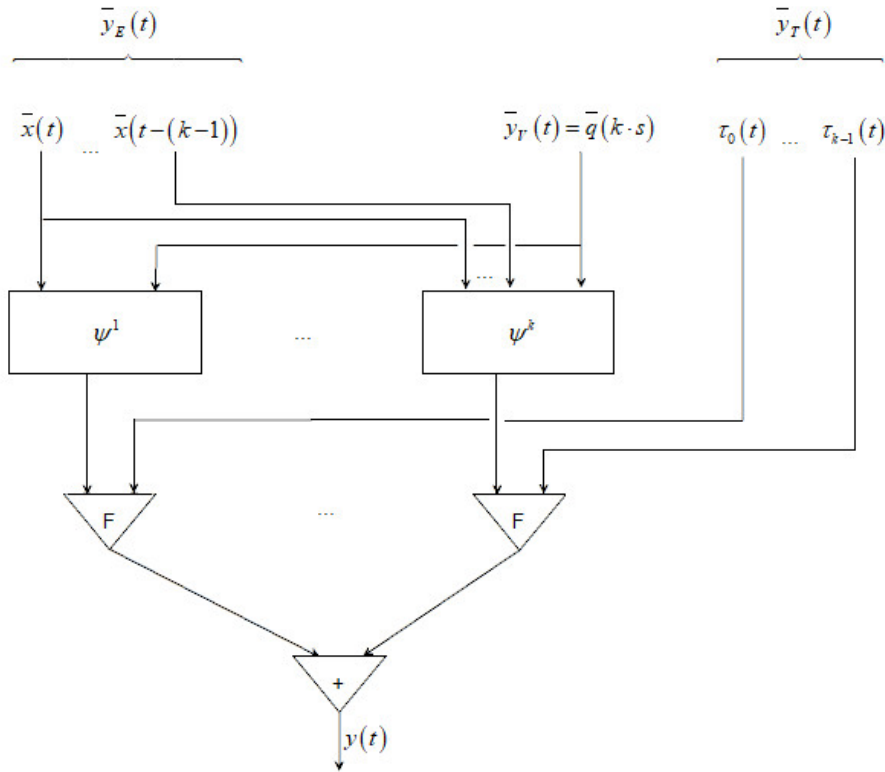


Рис. 13. Реализация блока  $\psi$

Учитывая, что каждая функция  $\psi^{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, k - 1$  подсоединена к своему элементу  $F$  и других элементов  $F$  в схеме нет, то получаем, что в каждый момент времени  $t = k \cdot s + i$  выход некоторого элемента  $F$  равен  $y(k \cdot s + i)$ , а выходы всех остальных элементов вида  $F$  равны нулю.

Обозначая  $y_i(t) = F(\psi^{i+1}(\bar{y}_V(t), \bar{y}_E^{(1), \dots, (i+1)}(t)), \tau_i(t))$  и учитывая вышесказанное, получаем, что на выходе схемы на рис. 13 в каждый момент времени  $t = k \cdot s + i$  будет появляться значение  $\sum_{i'=1}^k y_{i'}(t) = y_i(t) + \sum_{\substack{i'=1, \\ i' \neq i}}^k y_{i'}(t) = y(k \cdot s + i) + 0 = y(k \cdot s + i)$ , откуда и следует доказываемое.

Отметим также, что при реализации данного блока не использовались задержки.

Таким образом, показано, что, если каждый из блоков схемы будет выдавать такие выходы, как на рис. 2, то схема будет выдавать корректное значение  $y(t)$  в любой момент времени  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Откуда и следует доказываемое.

Причем отметим, у полученной схемы  $S_f^2$  всего две обратные связи. Посчитаем теперь сложность полученной схемы.

Очевидно, что  $L_2(f) \leq L(S_f^2) = L(\mathbf{T}) + L(\mathbf{E}) + L(\mathbf{S}) + L(\mathbf{R}) + L(\mathbf{V}) + L(\varphi^k) + L(\psi)$ . Но тогда, учитывая, что  $L(\mathbf{T}) = k, L(\mathbf{E}) = n \cdot (k - 1), L(\mathbf{S}) = k, L(\mathbf{R}) = k - 1, L(\mathbf{V}) = 0, L(\varphi^k) = 0, L(\psi) = 0$ , получаем оценку  $L_2(f) \leq k + n \cdot (k - 1) + k + (k - 1) = (n + 3) \cdot k - n - 1 \leq (n + 3) \cdot k = (n + 3) \cdot L(f)$ .

Таким образом, нашлась константа  $c = n + 3$ , что  $L_2(f) \leq L(f)$ .  $\square$

Таким образом, установлено, что при фиксированном количестве входов функций из  $\Omega$  количество задержек в минимальной (по числу задержек) для этой функции схеме, с не более чем двумя обратными связями, растет линейно от количества задержек в заданной схеме, реализующей ту же функцию.

**Теорема 4.** *Любой конечный автомат с  $n$  входами, реализуемый схемой, содержащей  $k$  задержек, в базисе из задержек и полного множества функциональных элементов, можно задать схемой с двумя обратными связями и  $n \cdot (k - 1) + 2k - 1 + \lceil \log_2 k \rceil$  задержками.*

*Любую нейронную схему с памятью, реализуемую из линейных функциональных элементов, вентилях и  $k$  задержек, можно задать схемой с одной обратной связью в соответствующем базисе, содержащей  $n \cdot k + 2k + 1$  задержек.*

*Доказательство.* Оценка  $n \cdot (k - 1) + 2k - 1 + \lceil \log_2 k \rceil$  вытекает из теоремы 3. Действительно, в предъявленной на рис. 2 схеме выполняется  $L(\mathbf{T}) = k, L(\mathbf{E}) = n \cdot (k - 1), L(\mathbf{S}) = k, L(\mathbf{R}) = k - 1, L(\mathbf{V}) = 0, L(\varphi^k) = 0, L(\psi) = 0$ . При этом, очевидно, что блок  $\mathbf{T}$  можно реализовать со сложностью  $\lceil \log_2 k \rceil$  (см. замечание в доказательстве теоремы 3).

Тогда схема  $S_f^2$  с двумя обратными связями имеет сложность  $L(S_f^2) = \lceil \log_2 k \rceil + n \cdot (k - 1) + k + (k - 1) = n \cdot (k - 1) + 2k - 1 + \lceil \log_2 k \rceil$ .

Вторая оценка  $n \cdot k + 2k + 1$ , верная для нейронных схем с памятью, получается из того факта, что в случае нейронных схем с памятью блок  $\mathbf{T}$  можно реализовать без использования обратных связей [2]. Однако взамен такой реализации требуется изменить каноническую схему, добавив в нее еще одну задержку. Таким образом, получается, что схема с одной обратной связью строится с использованием канонической схемы с  $k' = k + 1$  задержкой. Ее сложность равна  $L(S_f^2) = n \cdot (k' - 1) + 2k' - 1 = n \cdot k + 2k + 1$ .  $\square$

## Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов*, «Наука», Москва, 1985, 320 с.
- [2] Половников В.С., *Об оптимизации структурной реализации нейронных сетей*, Диссертация на соискание степени кандидата наук, Москва, 2007, 96 с.
- [3] Саймон Хайкин, *Нейронные сети. Полный курс*, «Вильямс», Москва, 2006, 1104 с.

### Feedback connection in recurrent circuits

Aleksiadis N.P., Polovnikov V.S., Chasovskikh A.A., Shishlyakov V.G.

It is shown that, under some natural restrictions on the element basis, for any recurrent circuit with a fixed number of inputs, it is possible to construct a circuit functionally equivalent to it in the same basis using superposition operations and no more than a double application of the feedback operation with a linear increase in the number of delays used compared to original circuit implementation. Thus, the linearity of the order of memory growth in the transition to the optimal (in terms of the number of delays) scheme with no more than two feedbacks has been proved. Short-term and long-term memory modules are distinguished in the structure of the recurrent circuits with no more than two feedbacks constructed in the work. The result obtained, in particular, is valid for the class of finite automata, as well as for the class of neural circuits built from elements containing gates.

*Keywords:* recurrent circuits, feedback, linear estimation, gates.

## References

- [1] Kudryavtsev V.B., Alyoshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to automata theory*, «Science», Moscow, 1985 (In Russian), 320 pp.
- [2] Polovnikov V.S., *On optimization of the structural implementation of neural networks*, Ph.D. Thesis ... physical and mathematical sciences, MSU, Moscow, 2007 (In Russian)
- [3] Simon Haykin, *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*, «Williams», Moscow, 2006 (In Russian), 1104 pp.