Сложение векторов на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами

Д. Э. Ибрагимова[1]

В данной статье рассматривается применение модели клеточного автомата с локаторами к задаче сложения векторов на прямой. Модель клеточного автомата с локаторами подразумевает возможность каждой ячейки автомата передавать сигнал на сколь угодно большие расстояния. В статье показано, что эта возможность позволяет уменьшить сложность рассматриваемой задачи с линейной до логарифмической по сравнению с классической моделью клеточного автомата.

Ключевые слова: клеточные автоматы, однородные структуры, сложение векторов.

1. Введение

Клеточные автоматы являются дискретными математическими моделями широкого класса реальных систем вместе с протекающими в них процессами.

Понятие клеточного автомата возникло в результате усовершенствования модели Дж. фон Неймана [1, 2, 3], предложенной им для описания процессов самовоспроизведения в биологии и технике. Эта модель развивалась и использовалась в работах А. Беркса [4], Э. Мура [5], В. Б. Кудрявцева, А. С. Подколзина, А. А. Болотова [6] и других исследователей.

Клеточный автомат — это математический объект с дискретными пространством и временем. Пространство поделено на клетки, в каждой из которых находится элементарный автомат. Такты времени задаются натуральными числами. Состояние каждой пространственной клетки определяется очень простыми правилами взаимодействия. Эти правила предписывают изменения состояния каждой клетки в следующем такте времени в ответ на текущее состояние автоматов соседних клеток.

В работе Гасанова Э.Э. [7] было введено понятие клеточного автомата с локаторами, которое отличается от понятия обычного клеточного автомата тем, что допускает передачу информации не только между

[1] *Ибрагимова Дильноза Эльдаровна* — старший преподаватель каф. прикладной математики и информатики филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, e-mail: ibragimova70@mail.ru.

Ibragimova Dilnoza Eldarovna — senior lecturer, Tashkent Branch of Lomonosov Moscow State University, Chair of Applied Mathematics and Computer Science.

соседними ячейками, но и на любое расстояние, посредством передачи сигнала в эфир. В работе рассматривается применение этой модели к одномерной задаче сложения векторов: на ^{1} произвольно отмечены особая точка, называемая "началом координат" и две других, которые будем называть "концами векторов". Нужно найти точку расстояние до которой от "начала координат" будет равно сумме расстояний от "начала координат" до "концов векторов".

Классическая модель клеточного автомата решает эту задачу за не менее чем линейное (по минимальному расстоянию между началом координат и концами векторов) время. В данной работе будет показано, что модель автомата с локаторами может решать эту задачу за логарифмическое время.

Автор выражает благодарность профессору Э.Э.Гасанову за постановку задачи.

2. Постановка задачи и формулировка результата

Приведем понятие клеточного автомата с локаторами, которое ранее было введено в работе Э. Э. Гасанова [7]. Приводимое здесь определение клеточного автомата с локаторами учитывает замечания Г. В. Калачева [8] и ранее в таком виде в литературе не встречалось.

Под *телесным углом* в $\mathbb{R}^k$ будем понимать часть пространства $\mathbb{R}^k$, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (*вершины угла*) и пересекающих некоторую гиперповерхность в $\mathbb{R}^k$. По определению будем считать, что вершина телесного угла не входит в телесный угол.

Рациональным телесным углом будем называть телесный угол, границы которого являются частями гиперплоскостей, задаваемых линейными уравнениями с целыми коэффициентами.

Клеточным автоматом с локаторами называется восьмерка $\sigma = (\mathbb{Z}^k, Q, V, G, +, L, \varphi, \psi)$, где $\mathbb{Z}^k$ — множество k-мерных векторов с целыми координатами, Q — некоторое конечное множество, называемое *множеством состояний*; в множестве Q выделено одно состояние q_0, называемое *состоянием покоя*; $V = (\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1})$ — упорядоченный набор попарно различных векторов из $\mathbb{Z}^k$; G — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом e; $+$ — коммутативная полугрупповая операция заданная на G; $L = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ — упорядоченный набор попарно различных рациональных телесных углов в $\mathbb{R}^k$ с вершиной в начале координат; φ — функция, зависящая от переменных $x_0, x_1, \dots, x_{h-1}, z_1, \dots, z_m$; $\varphi : Q^h \times G^m \to Q$, $\varphi(\mathbf{q_0}, \mathbf{e}) = q_0$; $\mathbf{q_0} = (q_0, \dots, q_0) \in Q^h$, $\mathbf{e} = (e, \dots, e) \in G^m$; ψ — функция зависящая от переменных $x_0, x_1, \dots, x_{h-1}, z_1, \dots, z_m$; $\psi : Q^h \times G^m \to G$; $\psi(\mathbf{q_0}, \mu) = e$, $\mu \in G^m$. Элементы множества $\mathbb{Z}^k$ называются *ячейками* клеточного автомата σ; элементы множества Q называются *состояниями ячейки* клеточного автомата σ; набор V называется *шаблоном соседства* клеточного автомата σ; элементы множества G называются *сигналами вещания*; набор L называется *шаблоном локаторов* клеточного автомата σ; функция φ называется *локальной функцией переходов* автомата σ; функция ψ называется *функцией вещания* автомата σ; переменные $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$ принимают значения из Q, переменные $z_1, \ldots, z_m$ принимают значения из G. Состояние q_0 интерпретируется как *состояние покоя*, а условие $\varphi(\mathbf{q_0}, \mathbf{e}) = q_0$ — как *условие сохранения состояния покоя.* Ячейки, находящиеся в состоянии отличном от q_0, будем называть *активными.* Условие $\psi(\mathbf{q_0}, \mu) = e$ означает, что ячейка в состоянии покоя и не имеющая активных соседей посылает в эфир нейтральный элемент, что можно интерпретировать как то, что она не посылает сигналы в эфир.

Здесь нам нужно было вводить упорядочение шаблона соседства V и шаблона локаторов L для того, чтобы установить взаимно однозначное соответствие между векторами из V и телесными углами из L и переменными локальной функции переходов φ и функции вещания ψ соответственно $x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$ и $z_1, \ldots, z_m$. Это соответствие можно сделать более явным, если индексировать переменные функций φ и ψ самими векторами и телесными углами, т.е. считать, что локальная функция переходов φ и функции вещания ψ зависят от переменных $x_{\mathbf{0}}, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{h-1}}, z_{\nu_1}, \ldots, z_{\nu_m}$, здесь индекс первой переменной есть нулевой вектор $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^k$. Если договориться так индексировать переменные локальной функции переходов и функции вещания, то их можно записывать в любом порядке, и тогда можно воспринимать шаблон соседства и шаблон локаторов как просто множества, а не упорядоченный набор. В дальнейшем мы будем индексировать переменные локальной функции переходов и функции вещания векторами из шаблона соседства и телесными углами из шаблона локаторов.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ и ν — телесный угол с вершиной в начале координат, то через $\nu(\alpha)$ обозначим телесный угол, полученный параллельным переносом телесного угла ν на вектор α, т.е. вершиной телесного угла $\nu(\alpha)$ является точка α.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ — ячейка клеточного автомата σ, то множество $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}\}$ называется *окрестностью ячейки* α, а множество $L(\alpha) = \{\nu_1(\alpha), \ldots, \nu_m(\alpha_m)\}$ называется *локаторами ячейки* α.

Состоянием клеточного автомата с локаторами σ назовем пару (g, f), где g — произвольная функция, определенная на множестве Z^k, принимающая значения из G, называемая *состоянием эфира*, f — произвольная функция, определенная на множестве Z^k, принимающая значения из Q и называемая *распределением состояний клеточного автома-*

та с локаторами σ. Такую пару функций можно интерпретировать как некую мозаику, получающуюся в k-мерном пространстве приписыванием каждой точке с целочисленными координатами некоторого сигнала из G и некоторого состояния из Q. Множество всевозможных состояний клеточного автомата с локаторами обозначим Σ.

Если $\alpha \in \mathbb{Z}^k$, (g, f) — состояние клеточного автомата с локаторами σ, то значение $g(\alpha)$ назовем *сигналом ячейки* α, определяемым состоянием (g, f), а значение $f(\alpha)$ — *состоянием ячейки* α, определяемым состоянием (g, f).

Для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$s_i(\alpha) = \sum_{\beta \in \nu_i(\alpha) \cap \mathbb{Z}^k} g(\beta) \qquad (1)$$

назовем *значением локатора* ν_i, определяемым состоянием (g, f). Здесь суммирование сигналов осуществляется с помощью определяющей операции $+$ полугруппы G.

На множестве Σ определим *глобальную функцию переходов* Φ клеточного автомата с локаторами σ, полагая $\Phi(g, f) = (g', f')$, где $(g, f), (g', f') \in \Sigma$ и для любой ячейки $\alpha \in \mathbb{Z}^k$ выполняются тождества

$$f'(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_{h-1}), s_1(\alpha), \ldots, s_m(\alpha)), \qquad (2)$$

$$g'(\alpha) = \psi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_{h-1}), s_1(\alpha), \ldots, s_m(\alpha)). \qquad (3)$$

Содержательная интерпретация отображения Φ такова, что сигнал каждой ячейки и состояние каждой ячейки "после перехода" определяется по состоянию упорядоченной окрестности ячейки и по значениям локаторов "до перехода" с помощью законов φ и ψ одинаково для всех ячеек.

Поведениями клеточного автомата с локаторами σ назовем такие последовательности $(g_0, f_0), (g_1, f_1), (g_2, f_2), \ldots$ его состояний, для которых выполняется $(g_{i+1}, f_{i+1}) = \Phi(g_i, f_i)$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$, причем (g_i, f_i) называется *состоянием клеточного автомата с локаторами* σ *в момент* i, а (g_0, f_0) называется *начальным состоянием клеточного автомата с локаторами* σ.

Сформулируем задачу сложения векторов на прямой.

Пусть в пространстве $\mathbb{Z}^1$ задано начальное состояние I клеточного автомата, удовлетворяющее следующим условиям:

1) Любой ячейке присвоено одно из трех состояний $\{B, E, *\}$, где $*$ соответствует состоянию покоя, B интерпретируется как начало координат, а E — как концы векторов.

2) Есть лишь одна ячейка, которой присвоено состояние B, и не больше двух ячеек, которым присвоено состояние E.

Решением задачи сложения векторов на прямой, соответствующей начальному состоянию I, назовем состояние автомата, называемое финальным и удовлетворяющее следующим условиям:

1) Ячейке, которой в начальном состоянии было присвоено состояние B, присвоено одно из двух состояний B_F или $*$, в зависимости от расположения ячеек в состоянии E. Если в I ячейки E располагаются на равном расстоянии слева и справа от ячейки B, то в этом случае сумма векторов будет равна 0 и ячейка B перейдет в состояние $*$. Иначе ячейка B перейдет в состояние B_F.

2) Ячейке, которая находится от ячейки B на расстоянии равном сумме векторов, присвоено состояние E_F.

3) Ячейкам, которые находятся между ячейками в состояниях B_F и E_F, присвоено состояние C.

4) Остальным ячейкам присвоено состояние $*$.

5) Описанное выше финальное состояние в дальнейшем не изменяется.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Существует клеточный автомат с локаторами σ с 38 состояниями и с мощностью алфавита вещания 40, который решает задачу сложения векторов на прямой за время не превышающее $2\log_2 n + 6$, где n — расстояние от ячейки с начальным состоянием B до ближайшей ячейки с начальным состоянием E.*

3. Доказательство теоремы

Рассмотрим клеточный автомат $\sigma = (\mathbb{Z}^1, Q, V = \{\varnothing\}, G, +, L, \varphi, \psi)$, где $G = \{0,1\}^3 \times \{0,1,2,3,4\}$, а $L = \{\nu_{-1}, \nu_1\}$, где ν_{-1}, ν_1 — телесные углы, соответствующие векторам (-1) и (1), т.е. шаблон локаторов состоит из двух лучей направленных влево и вправо.

Полугрупповую операцию на G определим следующим образом:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 \oplus a_2, b_1 \oplus b_2, max(c_1, c_2), max(d_1, d_2)).$$

По первой и второй компоненте сигнала из G суммирование берется по модулю 2. По первой компоненте передается побитово двоичная запись длины более короткого вектора. По второй компоненте эта длина откладывается от конца более длинного вектора. По третьей и четвертой компоненте ячейки передают сигналы о своем состоянии.

Нейтральным элементом данной полугруппы G является элемент $(0,0,0,0)$.

Определим также множество состояний

$$Q = \{*, B, B_B, B_1, B_*, B_C, B_>, B_<, B_=, B_R, B_2, E, E_1, E_{1-}, E_E, \\ L_+, L_-, L_C, L_1, L_{1-}, L_0, L_L, L_*, L_2, R_+, R_-, R_C, R_1, R_{1-}, \\ R_{1C}, R_{0C}, R_R, R_*, R_2, B_F, E_F, C, S\}.$$

Состояние $*$ соответствует состоянию покоя.

Сначала приведем неформальное описание алгоритма решения задачи. В случае когда оба вектора направлены в одну сторону, все активные ячейки находящиеся между началом и концом меньшего вектора посылают сигнал (1,0,1,0). Полугрупповая операция определена таким образом, что по первой компоненте вычисляется сумма по модулю два. Ячейки, которые находятся между началом и концом меньшего вектора, услышав по первой компоненте сигнала вещания 0, становятся молчащими. Таким образом, каждая вторая активная ячейка переходит в молчащее состояние. Ячейка, являющаяся концом меньшего вектора, посылает по четвертой компоненте сигнал, который услышала по первой компоненте слева (справа). То есть, конец вектора передает двоичную запись длины меньшего вектора. Все активные ячейки, находящиеся правее(левее) конца большего вектора, посылают сигнал (0,1,2,0). Этих ячеек бесконечное количество, так как мы не можем заранее знать длину результирующего вектора. По второй компоненте также вычисляется сумма по модулю два. Для ячеек, находящихся правее (левее) конца большего вектора, переход в молчащее состояние осуществляется по следующему принципу, если ячейка слышит разные сигналы по второй и четвертой компонентам сигнала вещания, то переходит в молчащее состояние. Таким образом, каждая вторая активная ячейка правее (левее) конца большего вектора переходит в молчащее состояние. По третьей и четвертой компоненте ячейки слышат самый сильный сигнал. Если ячейка, являющаяся концом меньшего вектора, слышит слева (справа) сигнал (0,0,0,0), то она посылает соответствующий сигнал о том, что не осталось ни одной активной ячейки между началом и концом меньшего вектора. Длина непрерывного отрезка из молчащих ячеек, начинающегося сразу после конца большего вектора, равна длине меньшего вектора. Значит самая левая(правая) активная ячейка, находящаяся правее(левее) конца большего вектора является концом результирующего вектора. Остальные активные ячейки, за исключением начала векторов, необходимо перевести в неактивное состояние или состояние покоя.

Для случая когда вектора направлены в противоположные стороны необходимо вначале определить направление результирующего вектора. Для этого все активные ячейки, находящиеся между концами и началом векторов посылают сигнал (1,0,1,0). Центральная ячейка сравнивает сигналы слева и справа поступающие по первой компоненте. И меняет свое состояние в зависимости от того с какой стороны слышит более сильный сигнал. Каждая вторая активная ячейка, находящаяся между началом и концом вектора, на каждом такте переходит в молчащее состояние. Когда с какой-либо из сторон не останется активных ячеек, это определяется по сигналу посылаемому ячейками по третьей компоненте, центральная ячейка, в зависимости от своего состояния, посылает соответствующий сигнал. По этому сигналу ячейки, находящиеся между концами и началом векторов, определяют в какое состояние перейти. Состояние активных ячеек определяет по сигналу с какой стороны ячейки будут переходить в молчащее состояние. Например, если положительный вектор больше отрицательного, то надо будет откладывать длину отрицательного вектора от конца положительного вектора в левую сторону. Значит ячейки будут переходить в молчащее состояние по сигналу, который слышат справа. Длина непрерывного отрезка из молчащих ячеек, которые расположены сразу за концом положительного вектора слева, в этом случае будет равна длине отрицательного вектора. Значит самая правая активная ячейка, из тех активных ячеек, что находятся между началом и концом положительного вектора, является концом результирующего вектора. В случае когда длина отрицательного вектора больше рассуждения аналогичны, и самая левая активная ячейка, из тех активных ячеек, что находятся между началом и концом отрицательного вектора, является концом результирующего вектора.

Опишем функции φ и ψ для каждого состояния автомата. Для простоты изложения будем называть ячейку, которая в начальный момент I имела состояние B, *началом векторов* или *центральной ячейкой.* А ячейки, которые в I имели состояние E, будем называть *концами векторов.* Если активная ячейка посылает в эфир сигнал $(0,0,0,0)$, будем говорить что она молчит. Пусть $z_{\nu_{-1}} = \{z^1_{\nu_{-1}}, z^2_{\nu_{-1}}, z^3_{\nu_{-1}}, z^4_{\nu_{-1}}\}$ и $z_{\nu_1} = \{z^1_{\nu_1}, z^2_{\nu_1}, z^3_{\nu_1}, z^4_{\nu_1}\}$.

Будем проводить доказательство теоремы, одновременно демонстрируя поведение автомата на примерах с начальным состоянием, приведенном ниже:

Пример 1. Случай, когда оба вектора направлены вправо.
$t = 0$

q	*	B	*	*	*	*	*	E	*	E	*	*	*	*	*	*	*	*
ν_{-1}^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Пример 2. Случай, когда вектора направлены в противоположные стороны.

$t = 0$

q	*	E	*	*	*	*	*	B	*	*	*	*	*	*	*	*	*	E	*
ν_{-1}^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Здесь q — строка состояний клеточного автомата; ν_{-1}^1, ν_{-1}^2, ν_{-1}^3, ν_{-1}^4 — строки, соответствующие компонентам значения локатора ν_{-1}; ν_1^1, ν_1^2, ν_1^3, ν_1^4 — строки, соответствующие компонентам значения локатора ν_1; ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 — строки, соответствующие компонентам сигнала вещания, посылаемого в эфир.

B — это начальное состояние ячейки, определяющей начало векторов. Ячейка в этом состоянии посылает сигнал $(0, 0, 0, 1)$ и ждет сигнала от ячеек в состоянии E, для того чтобы определить находится ли она справа или слева от "концов векторов" или между ними. E — это начальное состояние ячейки, определяющее конец вектора. В этом состоянии ячейка посылает сигнал $(0, 0, 1, 0)$. $*$ — это начальное состояние остальных ячеек (не начала и не конца вектора). Ячейки в этом состоянии ждут сигнала от других ячеек, чтобы перейти в левую или правую версию.

Этап 1: Определение ориентации.

На первом такте сигналы подают только ячейки в состоянии B и E для того, чтобы остальные ячейки смогли определить свою ориентацию.

В примере 1 на втором такте ячейка B получив сигнал (0,0,1,0) только справа, понимает что оба конца вектора находятся справа и переходит в состояние B_B. В состояние B_B центральная ячейка переходит в случае когда оба конца векторов расположены слева или справа от начала векторов. То есть либо оба вектора положительны, либо оба — отрицательны.

Ячейки в состоянии $*$, находящиеся левее начала векторов переходят в состояние R_-. Остальные ячейки, находящиеся в состоянии $*$ переходят в состояния L_+, R_+ или R_C.

Состояние L_+ — это состояние для всех ячеек, находящихся между концом вектора меньшей длины и началом векторов. Состояние R_+ — это состояние, которое принимают ячейки, находящиеся правее самого правого конца вектора. Состояние R_C — это состояние ячеек, находящихся между концами векторов.

$t = 1$

q	R_-	B_B	L_+	L_+	L_+	L_+	L_+	E	R_C	E	R_+	R_+	R_+	R_+	R_+	R_+	R_+	R_+
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^4_{-1}	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^1_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

В примере 2 на втором такте ячейка в состоянии B, услышав слева и справа сигналы (0,0,1,0), понимает, что вектора направлены в противоположные стороны и переходит в состояние B_C. Ячейки, находящиеся между центральной ячейкой и концом положительного вектора, переходят в состояние R_C. Ячейки, находящиеся между центральной ячейкой и концом отрицательного вектора, переходят в состояние L_C. Ячейки, находящиеся правее конца положительного вектора, переходят в состояние R_+. Ячейки, находящиеся левее конца отрицательного вектора, переходят в состояние R_-.

$t = 1$

q	R_-	E	L_C	L_C	L_C	L_C	L_C	B_C	R_C	R_C	R_C	R_C	R_C	R_C	R_C	R_C	R_C	E	R_+
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^1_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
ν^4_1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Опишем функции φ и ψ для состояний B и $*$.

$$\varphi(B, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} B_B, \text{если } (z^3_{\nu_{-1}} = 0,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 0) \\ \qquad \text{или } (z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 0); \\ B_C, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 0; \end{cases}$$

$$\psi(B, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 1).$$

$$\varphi(*, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_-, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = z^4_{\nu_1} = 1; \\ R_+, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_{-1}} = 1,\ z^3_{\nu_1} = z^4_{\nu_1} = 0; \\ L_C, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = z^4_{\nu_1} = 1; \\ R_C, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_{-1}} = 1,\ z^3_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 0; \\ L_-, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 1; \\ L_+, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 0,\ z^4_{\nu_{-1}} = 1,\ z^3_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 0. \end{cases}$$

$$\psi(*, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 0).$$

В случае когда оба вектора отрицательные, ячейки, находящиеся правее самой правой ячейки в состоянии E, переходят в состояние R_-. Ячейки, находящиеся между концом вектора меньшей длины и началом векторов, переходят в состояние L_-. Ячейки, находящиеся между концами векторов, переходят в состояние L_C.

Состояния L_+, L_-, R_+, R_-, L_C и R_C — это, по сути, состояния сна. Эти состояния нужны для того, чтобы центральная ячейка успела определить свое положение относительно концов векторов и послала соответствующий сигнал. По этому сигналу остальные ячейки могут определиться со своей правой или левой версией.

В примере 1 ячейка B_B посылает сигнал (0,0,0,2) для того, чтобы концы векторов определили свое положение относительно начала векторов.

$$\varphi(B_B, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = B_1.$$

$$\psi(B_B, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0, 0, 0, 2), \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 0,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 0; \\ (0, 0, 0, 4), \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 0. \end{cases}$$

Сигнал (0,0,0,4) ячейка B_B посылает в случае, когда оба вектора отрицательные.

В примере 2 ячейка B_C посылает сигнал (0,0,0,3).

$$\varphi(B_C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = B_=.$$

$$\psi(B_C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,3).$$

Ячейка E, во всех случаях, ждет сигнала от начала векторов, чтобы определить свое положение относительно начала векторов, находится ли она слева или справа от начала векторов. То есть "вектора" определяют свою ориентацию, отрицательную или положительную.

$$\varphi(E, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} E_{1-}, \text{ если } (z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 4) \\ \qquad \text{или } (z^3_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 4); \\ E_1, \text{ если } (z^3_{\nu_{-1}} = 0,\ z^4_{\nu_{-1}} = 2,\ z^3_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 0) \\ \qquad \text{или } (z^3_{\nu_{-1}} = 0,\ z^4_{\nu_{-1}} = 2,\ z^3_{\nu_1} = z^4_{\nu_1} = 0); \\ E_E, \text{ если } (z^3_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 3) \\ \qquad \text{или } (z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 3,\ z^3_1 = 0,\ z^4_1 = 0); \\ C, \text{ если } (z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 2,\ z^3_{\nu_1} = z^4_{\nu_1} = 0) \\ \qquad \text{или } (z^3_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 4). \end{cases}$$

$$\psi(E, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,1,0).$$

Состояние E_{1-} возникает когда оба вектора отрицательные. Состояние E_1 возникает когда оба вектора положительные. Состояние E_E возникает когда вектора направлены в противоположные стороны.

На этом этап определения ориентации заканчивается.

Этап 2. Сравнение длин векторов, если вектора направлены в разные стороны.

В случае когда концы векторов расположены по разные стороны от центральной ячейки (пример 2), прежде чем находить сумму векторов, надо определить направление результирующего вектора. Для этого надо определить какой из векторов длиннее. Алгоритм сравнения длин отрезков описан в статье Васильева Д. И.[9]. В случае, когда вектора расположены по одну сторону от центральной точки (пример 1) этап сравнения длин пропускается.

Для примера 2 на третьем такте ячейки L_C переходят в состояние L_1.

$$\varphi(L_C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} C, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 4; \\ L_1, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\psi(L_C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,0).$$

Ячейки R_C переходят в состояние R_{1C}.

$$\varphi(R_C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} C, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 2,\ z^3_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 0; \\ R_{1C}, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\psi(R_C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,0).$$

Ячейки R_+ и R_- переходят в состояние S. Состояние S — это состояние псевдопокоя. Все ячейки левее конца отрицательноговектора и все ячейки правее конца положительного вектора должны стать молчащими. В дальнейшем процессе они участвовать не будут.

$$\varphi(R_+, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_1, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 0; \\ R_+, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 2; \\ S, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 3 \text{ или } \ z^4_{\nu_{-1}} = 4. \end{cases}$$

$$\psi(R_+, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,0).$$

$$\varphi(R_-, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_{1-}, \text{ если } z^4_{\nu_1} = 0; \\ R_-, \text{ если } z^4_{\nu_1} = 4; \\ S, \text{ если } z^4_{\nu_1} = 2 \text{ или } z^4_{\nu_1} = 3. \end{cases}$$

$$\psi(R_-, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,0).$$

Концы векторов переходят в состояние E_E. Ячейка B_C переходит в состояние $B_=$.

$t = 2$

q	S	E_E	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	$B_=$	R_{1C}	R_{1C}	R_{1C}	R_{1C}	R_{1C}	R_{1C}	R_{1C}	R_{1C}	R_{1C}	E_E	S
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
ν^1_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
ν^4_1	3	3	3	3	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
ψ_4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Состояние L_1 — это состояния в какой-то момент всех ячеек, находящихся между началом и концом вектора меньшей длины, в случае когда оба вектора положительны. Или между центральной ячейкой и концом отрицательного вектора, в случае когда вектора направлены в противоположные стороны. На каждом следующем такте каждая вторая ячейка находящаяся в этом состоянии переходит в состояние S или состояние L_0. В данном случае переходят в состояние L_0.

$$\varphi(L_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} L_0, \text{ если } z^1_{\nu_{-1}} = 0, \ z^4_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_1} = 1; \\ L_*, \text{ если } z^4_{\nu_1} = 3; \\ S, \text{ если } z^1_{\nu_{-1}} = 0, \ z^4_{\nu_{-1}} = 0, \ z^4_{\nu_1} = 0. \end{cases}$$

$$\psi(L_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (1, 0, 1, 0).$$

В примере 2 ячейки в состоянии E_E посылают сигнал по четвертой компоненте для того, чтобы, после окончания этапа сравнения длин, определить которые из молчащих ячеек перевести в "кричащее" состояние.

$$\varphi(E_E, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} E_E, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 0; \\ \text{S, если } z^4_{\nu_{-1}} = 2 \text{ или } z^4_{\nu_1} = 2. \end{cases}$$

$$\psi(E_E, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 1).$$

Центральная ячейка побитово сравнивает длины векторов. Побитовые записи длин векторов подаются на центральную ячейку от младшего разряда к старшему. Сравнивая соответствующие биты центральная ячейка переходит в одно из трех состояний:

- $B_<$ — если левый бит текущего разряда меньше правого. Если сигналы слева и справа равны, то состояние центральной ячейки не меняется;
- $B_>$ — если левый бит больше правого. Если сигналы слева и справа равны, то состояние центральной ячейки не меняется;
- $B_=$ — может возникнуть только если самые младшие разряды равны или если совпадают все биты, полученные центральной ячейкой.

$$\varphi(B_=, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} B_>, \text{ если } z^1_{\nu_{-1}} = 1, \ z^1_{\nu_1} = 0; \\ B_<, \text{ если } z^1_{\nu_{-1}} = 0, \ z^1_{\nu_1} = 1; \\ S, \text{ если слышит сигнал (0,0,0,0) слева и справа.} \end{cases}$$

$$\psi(B_=, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0, 0, 0, 4), \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = z^3_{\nu_1} = 0; \\ (0, 0, 0, 0), \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Дальше на каждом такте каждая вторая ячейка в состоянии R_{1C} будет переходить в состояние R_{0C}, а каждая вторая ячейка в состоянии L_1 будет переходить в состояние L_0.

$$\varphi(R_{1C}, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_{0C}, \text{ если } z^1_{\nu_1} = 0, \ z^4_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_1} = 1; \\ R_*, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 2. \end{cases}$$

$$\psi(R_{1C}, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (1, 0, 1, 0).$$

Состояние R_* мы опишем позже.

Сигнал по третьей компоненте ячейки L_1 и R_{1C} посылают для того, чтобы центральная ячейка поняла есть ли еще ячейки в состоянии L_1 или R_{1C} слева или справа. Этап сравнения длин закончится, когда не останется ни одной ячейки в состоянии L_1 или R_{1C}.

$t = 3$

q	S	E_E	L_0	L_1	L_0	L_1	L_0	$B_=$	R_{0C}	R_{1C}	R_{0C}	R_{1C}	R_{0C}	R_{1C}	R_{0C}	R_{1C}	R_{0C}	E_E	S
ν_{-1}^1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
ν_{-1}^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν_{-1}^4	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν_1^1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
ν_1^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
ν_1^4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
ψ_1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
ψ_4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

В примере 2 центральная ячейка продолжает сравнивать сигналы, полученные по первой компоненте слева и справа.

$t = 4$

q	S	E_E	L_0	L_0	L_0	L_1	L_0	$B_=$	R_{0C}	R_{1C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{1C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	E_E	S
ν_{-1}^1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
ν_{-1}^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^3	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν_{-1}^4	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν_1^1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
ν_1^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
ν_1^4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
ψ_4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

На шестом такте ячейка в состоянии $B_=$ слышит по первой компоненте слева 1, а справа 0, и переходит в состояние $B_>$.

$$\varphi(B_>, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} B_<, \text{ если } z_{\nu_{-1}}^1 = 0,\ z_{\nu_1}^1 = 1; \\ B_R, \text{ если } z_{\nu_{-1}}^3 = 1,\ z_{\nu_1}^3 = 0; \end{cases}$$

$$\psi(B_>, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0,0,0,3), \text{ если } z_{\nu_{-1}}^3 = 1,\ z_{\nu_1}^3 = 0; \\ (0,0,0,0), \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Переход центральной ячейки в состояние B_R будет означать, что длина отрицательного вектора больше.

$t = 5$

q	S	E_E	L_0	L_0	L_0	L_0	L_0	$B_>$	R_{0C}	R_{1C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	E_E	S
ν_{-1}^1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
ν_{-1}^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν_{-1}^4	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν_1^1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
ν_1^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
ν_1^4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

На седьмом такте ячейка в состоянии $B_>$ слышит по первой компоненте слева 0, а справа 1, и переходит в состояние $B_<$.

$$\varphi(B_<, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} B_>, \text{ если } z_{\nu_{-1}}^1 = 1, \ z_{\nu_1}^1 = 0; \\ E_1, \text{ если } z_{\nu_{-1}}^3 = 0, \ z_{\nu_1}^3 = 1; \end{cases}$$

$$\psi(B_<, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0,0,0,2), \text{ если } z_{\nu_{-1}}^3 = 0, \ z_{\nu_1}^3 = 1; \\ (0,0,0,0), \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку ячейка $B_<$ слышит по третьей компоненте слева 0, а справа 1, она понимает, что не осталось ни одной ячейки в состоянии L_1 и еще есть ячейки в состоянии R_{1C}. Значит отрицательный вектор короче. Ячейка $B_<$ посылает сигнал (0,0,0,2) и на следующем такте перейдет в состояние E_1.

$t = 6$

q	S	E_E	L_0	L_0	L_0	L_0	L_0	$B_<$	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	R_{0C}	E_E	S
ν_{-1}^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
ν_{-1}^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
ν_{-1}^4	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν_1^1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

На восьмом такте ячейки L_0, услышав по четвертой компоненте справа 2, переходят в состояние L_1.

$$\varphi(L_0, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} L_1, \text{ если } z_{\nu_1}^4 = 2; \\ L_*, \text{ если } z_{\nu_1}^4 = 3. \end{cases}$$

$$\psi(L_0, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 0).$$

Состояние L_* мы опишем позже.

Ячейки R_{1C} и R_{0C}, услышав по четвертой компоненте слева 2, переходят в состояние R_*. Состояние R_* — это однотактовый сон, ячейки в этом состоянии не посылают никаких сигналов и не реагируют на поступающие сигналы.

$$\varphi(R_{0C}, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_{1C}, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 3; \\ R_*, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 2. \end{cases}$$

$$\psi(R_{0C}, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 0).$$

Ячейки в состоянии E_E переходят в состояние S.

$t = 7$

q	S	S	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	E_1	R_*	R_*	R_*	R_*	R_*	R_*	R_*	R_*	R_*	S	S
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_{-1}	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ν^1_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
ψ_1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

На этом этап сравнения длин векторов заканчивается.

Этап 3. Вычисление суммы векторов.

Для примера 1 на третьем такте ячейка B_B переходит в состояние B_1. Состояние B_1 — это состояние, в которое переходит центральная ячейка, в случае когда оба вектора направлены положительно или отрицательно. Ближайшая к началу вектора ячейка E переходит в E_1, другая ячейка E переходит в C. Состояние C — это состояние ячеек, находящихся между началом и концом вектора, после завершения работы автомата. В этом состоянии ячейки ничего не посылают в эфир и не переходят в новые состояния.

$$\varphi(C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = C.$$

$$\psi(C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 0).$$

Ячейки L_+ переходят в активное состояние L_1, общее количество ячеек в состоянии L_1 вместе с ячейкой B_1 будет равно длине меньшего вектора.

$$\varphi(L_+, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = L_1.$$
$$\psi(L_+, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 0).$$

Ячейки R_C переходят в C, так как по окончании работы автомата они окажутся между началом и концом результирующего вектора.

$$\varphi(R_C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} C, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 1, \ z^4_{\nu_{-1}} = 2, \ z^3_{\nu_1} = 1, \ z^4_{\nu_1} = 0; \\ R_{1C}, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\psi(R_C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,0).$$

Ячейки R_- переходят в состояние S. Так как оба вектора положительно ориентированы, все "отрицательные" ячейки должны стать молчащими. В дальнейшем процессе они участвовать не будут.

$$\varphi(R_-, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_{1-}, \text{ если } z^4_{\nu_1} = 0; \\ R_-, \text{ если } z^4_{\nu_1} = 4; \\ S, \text{ если } z^4_{\nu_1} = 2 \text{ или } z^4_{\nu_1} = 3. \end{cases}$$

$$\psi(R_-, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,0).$$

Состояние R_+ — это состояние двухтактового сна, на следующем такте, ячейки в этом состоянии перейдут в состояние R_1. Ячейкам в состоянии R_1 будет побитово передаваться двоичная запись длины меньшего вектора. Состояние R_1 должно появиться на один такт позже, чем L_1, так как ячейка E_1 должна сначала получить младший разряд в двоичной записи длины меньшего вектора и на следующем такте послать соответствующий сигнал.

$$\varphi(R_+, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_1, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 0; \\ R_+, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 2; \\ S, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 3 \text{ или } \ z^4_{\nu_{-1}} = 4. \end{cases}$$

$$\psi(R_+, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,0).$$

$t = 2$

q	S	B_1	L_1	L_1	L_1	L_1	L_1	E_1	C	C	R_+	R_+	R_+	R_+	R_+	R_+	R_+	R_+
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^4_{-1}	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ν^1_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

На четвертом такте в примере 1 ячейка B_1 переходит в состояние сна B_*.

$$\varphi(B_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = B_*.$$
$$\psi(B_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (1, 0, 1, 0).$$

Состояние B_* — это состояние, в котором центральная ячейка молчит, до тех пор пока не услышит сигнал о том, что не осталось ни одной ячейки в состоянии L_1. Это будет означать, что сумма векторов найдена. В случае получения соответствующего сигнала центральная ячейка станет началом результирующего вектора и перейдет в состояние L_2. Функции φ и ψ для состояния B_* мы опишем в разделе «Этап 4. Завершение работы».

Ячейки L_1 затираются, в данном случае переходят в состояние S, если по первой компоненте слева получили сигнал 0.

Ячейки R_+ переходят в активное состояние R_1, услышав слева сигнал (0,0,1,0). Количество ячеек в состоянии R_1 бесконечно, поскольку мы не можем заранее определить какая из ячеек в состоянии R_1 будет концом результирующего вектора.

Ячейка E_1 передает по четвертой компоненте сигнал, который она получила по первой компоненте слева. Если ячейка в состоянии E_1 получает по третьей компоненте слева 0, то она понимает, что не осталось ни одной ячейки в состоянии L_1 и переходит в состояние B_2. Состояние B_2 мы опишем позже.

$$\varphi(E_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = B_2, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 0.$$

$$\psi(E_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0, 0, 0, 0), \text{ если } z^1_{\nu_{-1}} = 0; \\ (0, 0, 0, 1), \text{ если } z^1_{\nu_{-1}} = 1. \end{cases}$$

$t = 3$

q	S	B_*	L_1	S	L_1	S	L_1	E_1	C	C	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1
ν^1_{-1}	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^1_1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
ψ_3	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

На следующих тактах, в примере 1, ячейка E_1 продолжает посылать по четвертой компоненте сигнал, который был получен по первой компоненте слева. Ячейки R_1 затираются (переходят в состояние S), если по второй и четвертой компоненте слева слышат разные сигналы $\{0,1\}$. По окончании этапа определения длины результирующего вектора, самая левая ячейка R_1 перейдет в состояние R_2, остальные ячейки из состояния R_1 перейдут в состояние S.

$$\varphi(R_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_1, \text{ если } z^2_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_{-1}}; \\ S, \text{ если } (z^2_{\nu_{-1}} = 0,\ z^4_{\nu_{-1}} = 1) \text{ или } (z^2_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0); \\ S, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 2,\ z^4_{\nu_{-1}} = 2; \\ R_2, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 2,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0. \end{cases}$$

$$\psi(R_1, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,1,2,0).$$

Этап нахождения суммы векторов для примера 1 продолжается до тех пор пока не останется ни одной ячейки в состоянии L_1.

Автомат устроен так, что начиная с пятого такта мы не можем однозначно определить сигнал, который ячейки получают по второй компоненте справа, поскольку имеется бесконечное число ячеек в состоянии R_1.

$t = 4$

q	S	B_*	S	S	L_1	S	S	E_1	C	C	R_1	S	R_1	S	R_1	S	R_1	S
ν^1_{-1}	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
ν^3_{-1}	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^1_1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ν^3_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ν^4_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
ψ_3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	2	0	2	0	2	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$t = 5$

q	S	B_*	S	S	S	S	S	E_1	C	C	S	S	R_1	S	S	S	R_1	S
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
ν^3_{-1}	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^1_1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ν^3_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ν^4_1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

На последнем такте этапа вычисления суммы векторов ячейка E_1 не слышит сигнала по третьей компоненте слева и переходит в состояние

B_2. На этом этап вычисления суммы векторов для примера 1 завершается. В случае, когда оба вектора положительны, самая левая ячейка в состоянии R_1 будет концом результирующего вектора.

$t = 6$

q	S	B_*	S	S	S	S	S	B_2	C	C	S	S	S	S	S	S	R_1	S
ν_{-1}^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_{-1}^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
ν_{-1}^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2
ν_{-1}^4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν_1^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_1^2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ν_1^3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ν_1^4	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Вернемся к примеру 2, т.е к случаю, когда вектора расположены по разные стороны от центральной точки. Ячейки, которые находятся в состоянии R_* перейдут в состояние R_R. Переход ячеек в состояние R_R говорит о том, что длина положительного вектора больше длины отрицательного вектора. Значит конец результирующего вектора будет справа от центральной ячейки. От длины положительного вектора мы будем отнимать длину отрицательного вектора. Ячейкам в состоянии R_R будет побитово передаваться двоичная запись длины отрицательного вектора. Состояние R_R должно появиться на один такт позже, чем L_1, так как ячейка E_1 должна сначала получить младший разряд в двоичной записи длины отрицательного вектора и на следующем такте послать соответствующий сигнал.

$$\varphi(R_*, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = R_R.$$
$$\psi(R_*, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 0).$$

Ячейка в состоянии E_1 передает по четвертой компоненте сигнал, который она получила по первой компоненте слева. То есть, центральная ячейка побитово передает двоичную запись длины отрицательного вектора. И, таким образом, ячейки, находящиеся в состоянии R_R, понимают которые из них должны перейти в состояние S.

$$\varphi(R_R, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_R, \text{ если } z_{\nu_1}^1 = z_{\nu_{-1}}^4; \\ S, \text{ если } (z_{\nu_1}^1 = 0,\ z_{\nu_{-1}}^4 = 1) \text{ или } (z_{\nu_1}^1 = 1,\ z_{\nu_{-1}}^4 = 0); \\ S, \text{ если } z_{\nu_{-1}}^4 = 2,\ z_{\nu_1}^3 = 2; \\ R_2, \text{ если } z_{\nu_{-1}}^4 = 2,\ z_{\nu_1}^3 = 0. \end{cases}$$

$$\psi(R_R, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (1, 0, 2, 0).$$

Сигнал по третьей компоненте ячейки R_R посылают для того, чтобы, по завершении процесса нахождения суммы векторов, затереть все активные (за исключением центральной) ячейки слева от конца результирующего вектора. По завершении этапа вычисления суммы векторов самая правая ячейка в состоянии R_R будет концом результирующего вектора и перейдет в состояние R_2. Остальные ячейки в состоянии R_R затираются.

$t = 8$

q	S	S	S	L_1	S	L_1	S	E_1	R_R	R_R	R_R	R_R	R_R	R_R	R_R	R_R	R_R	S	S
ν^1_{-1}	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^1_1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	1	0	1	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$t = 9$

q	S	S	S	S	S	L_1	S	E_1	S	R_R	S	R_R	S	R_R	S	R_R	S	S	S
ν^1_{-1}	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^1_1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0
ν^4_1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$t = 10$

q	S	S	S	S	S	S	S	E_1	S	S	S	R_R	S	S	S	R_R	S	S	S
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^1_1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0
ν^4_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

На следующем такте ячейка E_1 слышит по третьей компоненте слева 0, понимает, что не осталось ни одной ячейки в состоянии L_1 и переходит в состояние B_2.

$$\varphi(B_2, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} C, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_1} = 3; \\ L_2, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 2 \text{ или } z^3_{\nu_1} = 2. \end{cases}$$

$$\psi(B_2, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 2).$$

$t = 11$

q	S	S	S	S	S	S	S	B_2	S	S	S	S	S	S	S	R_R	S	S	S
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ν^1_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0
ν^4_1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

На этом этап нахождения суммы векторов для примера 2 завершается.

Этап 4: Завершение работы.

Для примера 1 на этом этапе все лишние ячейки в состоянии R_1 затираются, крайняя левая ячейка R_1 слышит слева сигнал (0,0,0,2) и переходит в состояние R_2. Ячейки R_1, которые надо затереть, определяем по третьей компоненте. Если ячейка R_1 слышит слева сигнал (0,0,2,2) или (0,1,2,2), то ячейка затирается, то есть переходит в состояние S. Ячейка в состоянии B_*, услышав сигнал от ячейки B_2, просыпается и переходит в состояние L_2.

$$\varphi(B_*, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} L_2, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = 2 \text{ или } z^4_{\nu_1} = 2; \\ B_*, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\psi(B_*, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 0).$$

Ячейки в состоянии L_2 и R_2 посылают сигнал (0,0,0,3) для того, чтобы все ячейки между L_2 и R_2 перешли в состояние C.

$$\varphi(L_2, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = B_F.$$
$$\psi(L_2, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 3).$$

$$\varphi(R_2, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = E_F.$$
$$\psi(R_2, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 3).$$

$t = 7$

q	S	L_2	S	S	S	S	S	B_2	C	C	S	S	S	S	S	S	R_2	S
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ν^3_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ν^1_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ν^3_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_1	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	3	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0

Ячейки из состояния S могут перейти только в состояние покоя $*$ или в состояние C.

$$\varphi(S, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} C, \text{ если } z^4_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_1} = 3; \\ *, \text{ если } (z^4_{\nu_{-1}} = 3,\ z^4_{\nu_1} = 0) \text{ или } (z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 3). \end{cases}$$

$$\psi(S, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 0).$$

На последнем такте ячейки L_2 и R_2 переходят в состояния B_F и E_F. Ячейка B_2 в примере 1 перейдет в состояние C.

$t = 8$

q	$*$	B_F	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E_F	$*$
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_{-1}	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
ν^1_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ν^3_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Состояния B_F и E_F — состояния ячеек начала и конца результирующего вектора, а C — это состояние ячеек, находящихся между началом и концом вектора, при завершении работы автомата. В этих состояниях ячейки ничего не посылают в эфир и не переходят в новые состояния. В примере 1 автомат завершает свою работу.

Для примера 2 самая правая ячейка в состоянии R_R слышит по четвертой компоненте слева 2, а по третьей справа 0 и переходит в состояние R_2. Остальные ячейки в состоянии R_R, если они есть, переходят в состояние S.

$t = 12$

q	S	S	S	S	S	S	S	L_2	S	S	S	S	S	S	S	R_2	S	S	S
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ν^1_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0
ν^4_1	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0

На последнем такте ячейки в состоянии S, которые слышат слева и справа сигнал (0,0,0,3), переходят в состояние C. Остальные ячейки в состоянии S переходят в состояние $*$. Ячейка L_2 переходит в состояние B_F, ячейка R_2 — в состояние E_F. На этом автомат завершает свою работу.

$t = 13$

q	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	B_F	C	C	C	C	C	C	C	E_F	$*$	$*$	$*$
ν^1_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_{-1}	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
ν^1_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^2_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^3_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν^4_1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	0	0	0
ψ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ψ_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Описание функций φ и ψ для состояний в случае когда оба вектора отрицательные.

Принцип работы автомата в случае, когда оба вектора отрицательные, аналогичен описанному в примере 1. Дадим описание состояний для этого случая.

Состояние R_- — это состояние, которое принимают ячейки, находящиеся правее конца вектора большей длины. Это молчащие ячейки, которые переходят в состояние R_{1-} или в S в зависимости от полученных сигналов справа. Смысл состояния R_- тот же, что и состояния R_+.

$$\varphi(R_-, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_{1-}, \text{ если } z^4_{\nu_1} = 0; \\ R_-, \text{ если } z^4_{\nu_1} = 4; \\ S, \text{ если } z^4_{\nu_1} = 2 \text{ или } z^4_{\nu_1} = 3. \end{cases}$$

$$\psi(R_-, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0, 0, 0, 0).$$

Состояние L_- — это состояние на втором такте для всех ячеек, находящихся между концом вектора меньшей длины и началом векторов. Смысл состояния L_- тот же, что и состояния L_+.

$$\varphi(L_-, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = L_{1-}.$$
$$\psi(L_-, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,0).$$

Напомним, что в состояние L_C переходят ячейки, находящиеся между концами векторов, в случае когда оба вектора отрицательны, либо ячейки, находящиеся между началом и концом отрицательного вектора в случае, когда вектора направлены в противоположные стороны. В зависимости от сигнала, который посылают начало и концы векторов, ячейки в этом состоянии могут перейти в состояние C или L_1. В случае, когда оба вектора отрицательны L_C переходит в в состояние C.

$$\varphi(L_C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} C, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_{-1}} = 0,\ z^3_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 4; \\ L_1, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\psi(L_C, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,0).$$

В состояние E_{1-} переходит конец вектора меньшей длины. Ячейка в этом состоянии побитово передает двоичную запись длины меньшего вектора по четвертой компоненте. Если ячейка в состоянии E_{1-} получает по третьей компоненте справа 0, то она понимает, что не осталось ни одной ячейки в состоянии L_{1-}, посылает сигнал (0,0,0,2) и переходит в состояние C.

$$\varphi(E_{1-}, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = C, \text{ если } z^3_{\nu_1} = 0.$$

$$\psi(E_{1-}, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0,0,0,0), \text{ если } z^1_{\nu_1} = 0; \\ (0,0,0,1), \text{ если } z^1_{\nu_1} = 1; \\ (0,0,0,2), \text{ если } z^3_{\nu_1} = 0. \end{cases}$$

Состояние R_{1-} — это состояние в какой-то момент всех ячеек, находящихся правее конца вектора большей длины. Ячейки, находящиеся в этом состоянии, переходят в состояние S, если слышат разные сигналы 0,1 по второй и четвертой компоненте справа. По окончании этапа вычисления суммы векторов самая правая из ячеек в состоянии R_{1-} будет концом результирующего вектора и перейдет в состояние R_2. Остальные ячейки R_{1-} при завершении процесса затираются, то есть переходят в состояние S. Смысл состояния R_{1-} тот же, что и состояния R_1.

$$\varphi(R_{1-}, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} R_{1-}, \text{ если } z^2_{\nu_1} = z^4_{\nu_1}; \\ S, \text{ если } (z^2_{\nu_1} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 1) \text{ или } (z^2_{\nu_1} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 0); \\ S, \text{ если } z^3_{\nu_1} = 2,\ z^4_{\nu_1} = 2; \\ R_2, \text{ если } z^3_{\nu_1} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 2. \end{cases}$$

$$\psi(R_{1-}, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,1,2,0).$$

Сигнал по третьей компоненте ячейки R_{1-} посылают для того, чтобы после завершения второго этапа затереть все активные ячейки справа от конца результирующего вектора.

Состояние L_{1-} — это состояние в какой-то момент всех ячеек, находящихся между началом и концом вектора меньшей длины. На каждом следующем такте каждая вторая ячейка, находящаяся в этом состоянии, переходит в состояние S. Смысл состояния L_{1-} тот же, что и состояния L_1.

$$\varphi(L_{1-}, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} L_{1-}, \text{ если } z^1_{\nu_1} = 1; \\ S, \text{ если } z^1_{\nu_1} = 0. \end{cases}$$

$$\psi(L_{1-}, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (1, 0, 1, 0).$$

Этап завершения работы, в случае когда оба вектора отрицательные, ничем не отличается от случая когда оба вектора положительные.

Описание функций φ и ψ для состояний в случае когда вектора направлены в противоположные стороны и длина отрицательного вектора больше.

В случае когда длина отрицательного вектора больше, чем длина положительного вектора принцип работы автомата аналогичен случаю описанному в примере 2.

Опишем состояния для этого случая.

В этом случае центральная ячейка переходит в состояние B_R из состояния $B_>$. Ячейка в состоянии B_R передает по четвертой компоненте сигнал, который она получила по первой компоненте справа.

$$\varphi(B_R, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = B_2, \text{ если } z^3_{\nu_1} = 0.$$

$$\psi(B_R, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} (0, 0, 0, 0), \text{ если } z^1_{\nu_1} = 0; \\ (0, 0, 0, 1), \text{ если } z^1_{\nu_1} = 1; \end{cases}$$

Ячейки в состоянии L_1 и L_0 переходят в состояние L_*. Состояния L_* — это однотактовый сон, ячейки в этом состоянии не посылают никаких сигналов и не реагируют на поступающие сигналы. На следующем такте ячейки в этом состоянии перейдут в состояние L_L. Переход ячеек в состояние L_L говорит о том, что длина отрицательного вектора больше длины положительного вектора. Значит конец результирующего вектора будет слева от центральной ячейки. От длины отрицательного вектора мы будем отнимать длину положительного вектора. Ячейкам в состоянии L_L будет побитово передаваться двоичная запись длины положительного вектора. Состояние L_L должно появиться на один такт позже, чем R_{1C}, так как ячейка B_R должна сначала получить младший разряд в двоичной записи длины положительного вектора и на следующем такте послать соответствующий сигнал.

$$\varphi(L_*, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = L_L.$$
$$\psi(L_*, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (0,0,0,0).$$

Получив сигнал по четвертой компоненте, который передает ячейка B_R, ячейки в состоянии L_L понимают какие из них должны перейти в состояние S. По завершении этапа вычисления суммы векторов самая левая ячейка в состоянии L_L будет концом результирующего вектора и перейдет в состояние R_2. Остальные ячейки в состоянии L_L затираются (переходят в состояние S).

$$\varphi(L_L, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = \begin{cases} L_L, \text{ если } z^1_{\nu_{-1}} = z^4_{\nu_1}; \\ S, \text{ если } (z^1_{\nu_{-1}} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 1) \text{ или } (z^1_{\nu_{-1}} = 1,\ z^4_{\nu_1} = 0); \\ S, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 2,\ z^4_{\nu_1} = 2; \\ R_2, \text{ если } z^3_{\nu_{-1}} = 0,\ z^4_{\nu_1} = 2. \end{cases}$$

$$\psi(L_L, z_{\nu_{-1}}, z_{\nu_1}) = (1,0,2,0).$$

Сигнал по третьей компоненте ячейки L_L посылают для того, чтобы, после завершении этапа вычисления суммы векторов, затереть все активные (за исключением центральной) ячейки справа от конца результирующего вектора.

4. Время работы автомата

Максимальное время работы автомата $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ где T_i — количество тактов затраченное на выполнение соответствующего этапа.

T_1 равно константе 2.

T_2 это время выполнения этапа сравнения длин отрезков. В работе Васильева Д. И.[9] доказывается, что это время равно $\log_2 n + 2$, где n — длина меньшего отрезка.

T_3 равно $\log_2 n$, где n — длина меньшего вектора.

T_4 равно константе 2.

Таким образом $T \leq 2\log_2 n + 6$.

Список литературы

[1] Дж. фон Нейман, *Теория самовоспроизводящихся автоматов*, Мир, Москва, 1971.

[2] Neumann J., von, *Collected works*, New York, 1961 – 1963.

[3] Neumann J., von, *Theory of self-reproducing automata*, London, 1966.

[4] Burks A., *Essays on Cellular Automata*, University of Illinois Press, 1971.

[5] Мур Э. Ф., “Математические модели самовоспроизведения”, *В кн.: Математические проблемы в биологии*, 1966.

[6] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А., *Основы теории однородных структур*, Наука, Москва, 1990.

[7] Гасанов Э. Э., “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 120–133.

[8] Калачев Г. В., “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 121–133.

[9] Васильев Д. И., “Поиск юлижайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:3 (2020), 99–119.

The addition of vectors problem solution using the celluar automata with locators

Ibragimova D.E.

The article considers applying a cellular automaton with locators to solving the problem of vector addition. The locator cellular avtomaton model assumes the possibility for each cell to translate a signal through any distance. It is proven in this article that such possibility allows to decrease the problem complexity from linear to logarithmic (against the classic cellular automaton model).

Keywords: cellular automata, homogeneous structures, the problem of vector addition.

References

[1] Neumann J., von, *Theory of self-reproducing automata*, Мир, Moscow, 1971.

[2] Neumann J., von, *Collected works*, New York, 1961 – 1963.

[3] Neumann J., von, *Theory of self-reproducing automata*, London, 1966.

[4] Burks A., *Essays on Cellular Automata*, University of Illinois Press, 1971.

[5] Mur E. F., "Mathematical models of self-reproduction", *In b.: Mathematical problems in biology*, 1966.

[6] Kudryavtsev V.B., Podkolzin A.S., Bolotov A.A., *Fundamentals of the theory of homogeneous structures*, «Science», Moscow, 1990.

[7] Gasanov E.E., "Cellular automata with locators", *Intelligent systems. Theory and applications*, **24**:2 (2020), 120–133.

[8] Kalachev G.V., "Notes on the definition of a cellular automaton with locators", *Intelligent systems. Theory and applications*, **24**:4 (2020), 121–133.

[9] Vasilev D.I., "The closest neighbour problem solution using the cellular automata with locators model", *Intelligent systems. Theory and applications*, **24**:3 (2020), 99–119.