Оценка степеней разделяющих многочленов для монотонных и самодвойственных функций

М. В. Носов[1]

В работе получена верхняя оценка степени многочлена с действительными коэффициентами разделяющего нули и единицы монотонной булевской функциии в нечётном случае размерности пространства. Вместе с ранее известными оценками для чётного случая и нижней оценки для нечётного получается окончательный результат. Аналогичные результаты получены для класса самодвойственных функций.

Ключевые слова: монотонная булевская функция, самодвойственная булевская функция, разделяющий многочлен.

Пусть B^n - n-мерный единичный куб, $R[x]$ - множество многочленов от n переменных с действительными коэффициентами, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, P_2 - множество булевых функций, M_n - множество монотонных булевых функций от n переменных. Скажем, что многочлен $f(x), f(x) \in R[x]$ разделяет нули и единицы булевой функции $F(x)$ если

$$F(\alpha) = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) \geq 0, \quad F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) < 0, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n.$$

Такой многочлен будем называть разделяющим многочленом функции $F(x)$.

1.В работе [2] доказано, что для любой монотонной булевской функции от n переменных существует разделяющий многочлен степени не более $[\frac{n+1}{2}]$ и существует булевская функция, для которой степень разделяющего полинома не менее $[\frac{n}{2}]$. При чётном n верхняя и нижняя оценки совпадают, покажем, что будет такая же ситуация и при нечётном n.

Пусть $n = 2k + 1, F(x) \in M_n$, имеет место следующее представление [1]

$$F(x) = \bigvee_{(i_1,\ldots,i_m)\in U} x_{i_1} \ldots x_{i_m},$$

где $K = \{\sigma = (0, \ldots, \sigma_{i_1}, 0, \ldots, \sigma_{i_m}, 0, \ldots, 0) | \sigma_{i_j} = 1, (i_1, \ldots, i_m) \in U\}$ - множество нижних единиц функции F. Будем представление $F(x)$ записывать в виде

[1] *Носов Михаил Васильевич* — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@rambler.ru.

Nosov Michail Vasilevich-senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

$$F(x) = \bigvee_{\sigma \in K} x^{\sigma}.$$

Определим множества K_1 и K_2:

$$K_1 = K \bigcap \{\sigma |\, |\sigma| \leq k\}, \quad K_2 = K \bigcap \{\sigma |\, |\sigma| \geq k+1\}$$

тогда

$$F(x) = F_1(x) \bigvee F_2(x),$$

$$F_1(x) = \bigvee_{\sigma \in K_1} x^{\sigma}, \quad F_2(x) = \bigvee_{\sigma \in K_2} x^{\sigma}.$$

Определим многочлен из $R[x]$:

$$f_1(x) = \sum_{\sigma \in K_1} x^{\sigma}, \quad deg f_1 \leq k.$$

Тогда

$$F_1(\alpha) = 1 \Leftrightarrow f_1(\alpha) \geq 0, \quad F_1(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f_1(\alpha) = 0, \quad \alpha \in B^n.$$

Если $K_2 = \emptyset$, то$(f_1(x) - 0.5)$ - разделяющий многочлен F и степень его не более k.

Рассмотрим случай $K_2 \neq \emptyset$. Определим функцию $G(x) = \overline{F_2(\overline{x})}, F_2(x) = \overline{G(\overline{x})}$. Очевидно, что $G(x)$ монотонная булевская функция и $\{\overline{\sigma}| \quad \sigma \in K_2\}$ - верхние нули функции G. Для любого $\sigma \in K_2$ имеем $|\overline{\sigma}| \leq (2k+1) - (k+1) = k$, значит, если Λ - нижние единицы $G(x)$, то для любого $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda| \leq k+1$ и слой E^n_{k+1} лежит во множестве единиц G.

Определим множества K_3 и K_4:

$$K_3 = \Lambda \bigcap \{\lambda |\, |\lambda| \leq k\}, \quad K_4 = K \bigcap \{\lambda |\, |\lambda| = k+1\}$$

и функции

$$F_3(x) = \bigvee_{\lambda \in K_3} x^{\lambda}, \quad F_4(x) = \bigvee_{\lambda \in K_4} x^{\lambda}.$$

тогда

$$G(x) = F_3(x) \bigvee F_4(x),$$

Определим многочлен

$$f_2(x) = \sum_{\lambda \in K_3} x^{\lambda} + \delta(\sum_{i=1}^{n} x_i - k - 1),$$

где $0<\delta<\frac{1}{2^{2k+3}}$. Тогда, если $\alpha\in B^n$ и $G(\alpha)=0$, то $-(k+1)\delta\le f_2(x)\le -\delta$; если $G(\alpha)=1$, то возможны три случая: 1)$F_3(\alpha)=1$, $F_4(\alpha)=1$; 2)$F_3(\alpha)=1$, $F_4(\alpha)=0$; 3)$F_3(\alpha)=0$, $F_4(\alpha)=1$. В первом случае $1\le f_2(x)\le 2^{2k+2}$, во втором случае $0<1-\delta(k+1)\le f_2(\alpha)\le 2^{2k+1}$; в третьем случае $f_2(\alpha)=0$. Во всех трёх случаях $f_2(\alpha)\ge 0$.

Возьмём многочлен

$$f(x)=f_1(x)-\delta f_2(1-x_1,\dots,1-x_n).$$

Если $\alpha\in B^n$ и $F(\alpha)=0$, значит $f_1(\alpha)=0,\quad F_2(\alpha)=0,\quad ,G(\overline{\alpha})=1$, значит $f_2(\overline{\alpha})\ge 0$ и $f(\alpha)\le 0$. Пусть $F(\alpha)=1$, тогда могут быть три случая: 1)$F_1(\alpha)=1$, $F_2(\alpha)=1$; 2)$F_1(\alpha)=1$, $F_2(\alpha)=0$; 3)$F_1(\alpha)=0$, $F_2(\alpha)=1$. В первом и втором случаях $f(\alpha)\ge 1-\delta 2^{2k+2}\ge\frac{1}{2}$. В третьем случае $f_1(\alpha)=0,\quad G(\overline{\alpha})=0,\quad -(k+1)\delta\le f_2(\overline{\alpha})\le-\delta$, тогда $f(\alpha)\ge\delta^2$. Многочлен $f(x)-\frac{1}{2}\delta^2$ будет разделять нули и единицы монотонной функции $F(x)$ и $deg f(x)\le k$.

2.Для класса самодвойственных функций рассмотрим отдельно нечётный и чётный случаи. В первом случае линейная функция от всех аргументов является самодвойственной, её нули и единицы разделяются только полиномом степени n [2]. Во втором случае обе линейные функции от всех переменных не являются самодвойственными, следовательно, степень разделяющего полинома не более $n-1$, а для линейной самодвойственной функции с одной несущественой переменной, т.е. от нечётного числа существенных переменных $n-1$, требуется полином степени $n-1$.

Список литературы

[1] Яблонский С.В., Лупанов О.Б.(ред.) Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Издательство Наука, Москва, 1974, 242.

[2] Алешин С.В. Распознавание динамических образов. Издательство Московского университета, Москва, 1996, 97.

Estimates of the degrees of separating polynomials for monotone and self-dual functions

Nosov M.V.

In this paper, we obtain an upper bound on the degree of a polynomial with real coefficients separating zeros and ones of a monotone Boolean function in the odd case of the dimension of space.Together with the previously known estimates for the even case and the lower estimate for the odd one, the final result is obtained. Similar results are obtained for the class of self-dual functions.

*Keywords:*monotone Boolean function, self-dual Boolean function, separating polynomial.

References

[1] Yablonsky S.V.,Lupanov O.B.(ed.), *Discrete mathematics and mathematical questions of cybernetics*, Nauka, Moscow, 1974 (In Russian), 242 c.

[2] Aleshin S.V., *Dynamic image recognition*, Moscow University Press, Moscow, 1996 (In Russian), 97 c.